1. Suites de fonctions

On suppose donnée une suite (f_n) de fonctions définies dans un espace métrique X (souvent un intervalle) à valeurs dans un espace métrique Y (souvent $\mathbb{R}$). On suppose que pour tout $x \in X$ la suite $(f_n(x))$ converge vers un élément $f(x) \in Y$. On veut étudier f.

Définition – *Soient X un ensemble, $(Y, |.|)$ un espace normé et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de X dans Y.*
a) La suite de fonctions (f_n) est dite simplement convergente *si pour tout $x \in X$ la suite $(f_n(x))$ est convergente.*
b) La suite de fonctions (f_n) est dite uniformément convergente *vers une fonction $f : X \to Y$ si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe n_0 tel que pour tout $x \in X$ et tout $n \geq n_0$ on ait $|f(x) - f_n(x)| \leq \varepsilon$.*
(Autrement dit si $\|f - f_n\|_\infty = \sup\limits_{x\in X} |f(x) - f_n(x)|$ tend vers 0.)

Si $A \subset X$, on dira que (f_n) converge vers f uniformément sur A *si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe n_0 tel que pour tout $x \in A$ et tout $n \geq n_0$ on ait $|f(x) - f_n(x)| \leq \varepsilon$.*
(Autrement dit si $\|f - f_n\|_{\substack{A\\ \infty}} = \sup\limits_{x\in A} |f(x) - f_n(x)|$ tend vers 0.)

Proposition – *Toute suite de fonctions uniformément convergente est simplement convergente.*

Théorème de la limite uniforme – *Soient X un espace normé, A une partie de X, $a \in \bar{A}$ et $(f_n : A \to E)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions qui converge uniformément vers $f : A \to E$.*
On suppose que $l_n = \lim_{x\to a} f_n(x)$ existe pour tout n.
a) Si E est complet, alors $l = \lim_{x\to a} f_n(x)$ existe et $\lim_{x\to a} f(x) = l$.
b) Si E est quelconque et si $l = \lim_{n\to\infty} l_n$ existe, alors $\lim_{x\to a} f(x) = l$.

Corollaire – *a) Une limite uniforme d'applications continues est continue.*
b) Si une suite de fonctions continues $(f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R})_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur les compactes de f, alors f est continue sur $\mathbb{R}$.

Définition-caractérisation – *Si $[a, b]$ est un intervalle et E un e.v.n., les fonctions réglées $f : [a, b] \to E$ sont toutes les fonctions qui sont des limites uniformes de fonctions en escalier.*

Si E est de plus complet (Banach), on montre que les fonctions réglées sur $[a, b]$ sont celles qui admettent des limites à droite et à gauche en tout point.

Théorème d'inversion limite-intégrale – *Soit $[a, b]$ un intervalle borné de $\mathbb{R}$, et E un espace vectoriel normé complet (de Banach). Si une suite de fonctions réglées $(f_n : [a, b] \to E)_n$ converge uniformément vers f, alors f est réglé et $\displaystyle\int_a^b f = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n$.*

Théorème de dérivation – *Soit I un intervalle, $a \in I$, $(f_n)_n$ une suite de fonctions définies sur I (à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), dérivables sur I. Si la suite $(f'_n)_n$ des dérivées est uniformément convergente et la suite $(f_n(a))_n$ est convergente, alors*
a) pour tout $t \in I$, la suite $(f_n(t))_n$ est convergente vers une limite $f(t)$.
b) La fonction $t \mapsto f(t)$ est dérivable et $f'(t) = \lim\limits_{n\to\infty} f'_n(t)$.

2. Séries de fonctions

On suppose donnée une suite (u_n) de fonctions définies sur une partie de $\mathbb{R}$ (souvent un intervalle) à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ (ou plus généralement un espace vectoriel normé complet).

On suppose que pour tout $x \in X$, la série de terme général $\sum u_n(x)$ est convergente. On pose $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$. Le but est d'étudier S : continuité, dérivabilité, limites...

Définition – *Soient X un ensemble et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de X à valeurs dans $\mathbb{K}$ (ou dans un espace vectoriel normé $\mathbb{F}$).*

(1) *La série de fonctions $\sum u_n$ est dite* simplement convergente *si pour tout $x \in X$ la série numérique $\sum u_n(x)$ est convergente.*
(2) *La série de fonctions $\sum u_n$ est dite* absolument convergente *si pour tout $x \in X$ la série numérique $\sum |u_n(x)|$ est convergente.*
(3) *La série de fonctions $\sum u_n$ est dite* uniformément convergente *si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe n_0 tel que pour tout $x \in X$ et tout $n \geq n_0$ on ait $|\sum_{k=n}^{+\infty} u_k(x)| \leq \varepsilon$.*
(4) *On dit que la série de fonctions $\sum u_n$ est* normalement convergente *s'il existe une série numérique convergente b_n telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in X$ on ait $|u_n(x)| \leq b_n$;*
Plus généralement la série de fonctions $\sum u_n$ est normalement convergente sur une partie A de X *si la série numérique $\sum \|u_n\|_{\overset{\infty}{A}}$ converge.*

Proposition – *Toute série de fonctions uniformément convergente est simplement convergente. Toute série de fonctions normalement convergente à valeurs dans un espace de Banach est uniformément convergente.*

Théorème d'interversion des limites – *Soient X un espace métrique, A une partie de X, $a \in \bar{A}$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur A à valeurs dans $\mathbb{K}$.*

Si chaque u_n a une limite l_n en a et la série de fonctions $\sum u_n$ est uniformément convergente sur A de somme S, alors la série $\sum l_n$ est convergente, S admet une limite en a et $\lim_{t\to a} S(t) = \sum_{n=0}^{\infty} l_n$.

Théorème de continuité de la somme d'une série – *Soient X un espace métrique et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de X à valeurs dans $\mathbb{K}$. On suppose que la série de fonctions $\sum u_n$ est uniformément convergente de somme S. Si chaque u_n est continue en $x \in X$ alors S est continue en x. Si chaque u_n est continue alors S est continue.*

Théorème de dérivation – *Soit I un intervalle, $a \in I$, $(u_n)_n$ une suite de fonctions définies sur I, dérivables sur I. Si la série de terme général $(u_n')_n$ est uniformément convergente et la série de terme général $(u_n(a))_n$ est convergente, alors*

a) pour tout $t \in I$, la série $\sum u_n(t)$ est convergente. Notons S sa somme.
b) la fonction $t \mapsto S(t)$ est dérivable et sa dérivée en t vaut $S'(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n'(t)$

Théorème d'intégration terme à terme – *Soit (u_n) une suite de fonctions à valeurs réelles ou complexes, intégrables sur I, telle que la série $\sum u_n$ converge simplement vers une fonction S continue par morceaux sur I, et telle que la série $\sum \int_I |u_n|$ converge. Alors S est intégrable sur I et on a $\int_I S = \sum \int_I u_n$*

3. Séries entières

Une série entière est une série de fonctions $\sum u_n$ où les u_n sont des fonctions $x \mapsto a_n x^n$ définies sur $\mathbb{K}$ (avec $a_n \in \mathbb{K}$ ou dans un espace de Banach).

Remarque – *Soit (a_n) une suite de nombres complexes. Soient $x, y \in \mathbb{C}$ avec $|x| < |y|$. Si la suite $(a_n y^n)$ est bornée la série $\sum a_n x^n$ est (absolument) convergente.*

Proposition-définition – *On a pour toute suite (a_n) de nombres complexes*

$$\sup\left\{r \in \mathbb{R} \textit{ t.q. la suite } \Big(|a_n| r^n\Big)_n \textit{ borné}\right\} = \sup\left\{r \in \mathbb{R} \textit{ t.q. la série } \sum |a_n| r^n \textit{ est convergente}\right\}.$$

Ce nombre (éventuellement infini) s'appelle le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$.

Soit R le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$. Pour $r < R$ la série entière converge normalement sur $\{z \in \mathbb{C}; |z| < r\}$. Pour $|x| > R$ la suite $(a_n x^n)$ n'est pas bornée. On appelle *disque ouvert de convergence* l'ensemble $\{z \in C; |z| < R\}$.

Critère pour calculer le rayon R de convergence – *Soit $\sum a_n x^n$ une série entière.*
a) Si $\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$ converge vers l alors $R = 1/l$.
b) $\limsup |a_n|^{1/n} = 1/R$.

Soit $\sum a_n x^n$ une série entière. On appelle série dérivée la série entière $\sum n a_n x^{n-1}$.

Proposition – *La série dérivée $\sum n a_n x^{n-1}$ a même rayon de convergence que $\sum a_n x^n$.*

Théorème – *La somme d'une série entière est de classe C^∞ sur le disque ouvert de convergence.*

Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R et de somme S. Pour $n \in \mathbb{N}$, on a $a_n = \dfrac{S^{(n)}(0)}{n!}$

Proposition – *Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de rayon de convergence R. Notons D le disque ouvert de convergence. Pour $z \in D$, posons $S(z) = \sum_{n=0}^\infty a_n z^n$ et $T(z) = \sum_{n=0}^\infty n a_n z^{n-1}$. Pour $z_0 \in D$ on a $T(z_0) = \lim\limits_{z \to z_0} \dfrac{S(z) - S(z_0)}{z - z_0}$.*

Définition – *Soit U un ouvert de $\mathbb{R}$ (resp. de $\mathbb{C}$) et $f : U \to \mathbb{R}$ (resp. $f : U \to \mathbb{C}$) une fonction. On dit que f est développable en série entière (sur U), si pour tout $a \in U$, il existe $r > 0$ et une série entière $\sum a_n t^n$ de rayon de convergence r tels que, pour tout $x \in U$ avec $|x - a| < r$ on ait $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n (x-a)^n$.*

Remarquons que, dans cette définition, les a_n sont déterminés par f : on a $a_n = \dfrac{f^{(n)}(a)}{n!}$.

La somme d'une série entière est développable en série entière sur son disque de convergence.

4. Séries de Fourier

Fonctions périodes – *Soit $f : D \to \mathbb{R}$ où D est une partie de $\mathbb{R}$ et soit $t \in \mathbb{R}$.*
On dit que t est une **période** *de f ssi $\Big(\forall x \in D,\ t + x \in D$ et $f(x+t) = f(x)\Big)$ et alors f est périodique. Si f est périodique, l'ensemble E des périodes de f est un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$.*
La fonction f est dite **périodique de période** *T lorsque l'intersection de E et des réels strictement positifs admet T pour plus petit élément.*

Fonctions sinusoidales élémentaires de période T – *Les fonctions $x \mapsto \cos(\frac{2\pi n}{T}x)$ pour $n \geq 0$ et $x \mapsto \sin(\frac{2\pi n}{T}x)$ pour $n \geq 1$ admettent T comme période. On les appelle les fonctions* **sinusoidales élémentaires** *de période T. En fait elles sont périodiques de période T/n.*

Polynômes trigonométriques – *Un polynôme trigonométrique f de période T est une combinaison linéaire des fonctions sinusoidales élémentaires de période T.*
L'ensemble des polynômes trigonométriques de périodes T et de degré inférieur à N est donné par

$$\mathbb{E}_T^N = \left\{ f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{N} a_n \cos(\tfrac{2\pi n}{T}x) + b_n \sin(\tfrac{2\pi n}{T}x),\ a_n, b_n \in \mathbb{R} \right\}.$$

Proposition – *L'ensemble $\mathbb{E}_T^N$ muni du produit scalaire $\langle ., . \rangle$ donné par $\langle f, g \rangle = \frac{1}{T}\int_T f(x)g(x)dx$ est un espace euclidien de dimension $2N+1$. De plus les fonctions sinusoidales élémentaires périodiques de période T/n avec $n \leq N$ forment une base orthogonale de $\mathbb{E}_T^N$*

On en déduit que si

$$f(x) = a_0(f) + \sum_{n=1}^{N} a_n(f) \cos(\tfrac{2\pi n}{T}x) + b_n(f) \sin(\tfrac{2\pi n}{T}x),$$

est un polynôme trigonométrique, alors les coefficients $a_n(f)$ et $b_n(f)$ s'obtiennent par

$$a_0(f) = \frac{1}{T}\int_0^T f(x)dx \ = \ \frac{1}{T}\int_{t_0}^{T+t_0} f(x)dx, \tag{1}$$

$$a_n(f) = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\cos(\tfrac{2\pi n}{T}x)dx \ = \ \frac{2}{T}\int_{t_0}^{T+t_0} f(x)\cos(\tfrac{2\pi n}{T}x)dx \quad \text{pour } n \geq 1, \tag{2}$$

$$b_n(f) = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\sin(\tfrac{2\pi n}{T}x)dx \ = \ \frac{2}{T}\int_{t_0}^{T+t_0} f(x)\sin(\tfrac{2\pi n}{T}x)dx \quad \text{pour } n \geq 1. \tag{3}$$

Affirmation (Fourier environs 1808) – *Soit f une fonction continue périodique de période T, alors la série de fonctions*

$$a_0(f) + \sum_{n\geq 1} a_n(f)\cos(\tfrac{2\pi n}{T}x) + b_n(f)\sin(\tfrac{2\pi n}{T}x) \quad \textit{converge vers } f,$$

où $a_n(f)$ et $b_n(f)$ sont les **coefficients de Fourier réels de** *f donnés par (1), (2), (3).*

Tel quel, l'énoncé est génial mais flou et donc faux. Cette identité n'a pas lieu sous ses conditions sur f (il faut plus de régularité ou d'intégrabilité). Il convient aussi de préciser le sens de la convergence de la série (simple, uniforme, en moyenne quadratique...).

Harmonique de rang n – *Le terme général d'ordre* n, $H_n(f)$ *de la série de Fourier de* f *est appelé l'harmonique de rang* n *de* f. *On a :*

$$H_n(f)(x) = \begin{cases} a_0(f) & \text{pour } n = 0, \\ a_n(f)\cos(\frac{2\pi n}{T}x) + b_n(f)\sin(\frac{2\pi n}{T}x) & \text{pour } n \geq 1. \end{cases}$$

On peut récrire, (manière de voir appréciée par les physiciens)

$$H_n(f)(x) = \rho_n \cos(\frac{2\pi n}{T}x + \theta_n) \quad \text{où} \quad \begin{cases} \rho_n = \sqrt{a_n(f)^2 + b_n(f)^2} \\ \sin(\theta_n) = -\frac{b_n(f)}{\rho_n} \quad \text{et } \cos(\theta_n) = \frac{a_n(f)}{\rho_n} \end{cases}$$

ou bien encore, (souvent privilégié par les mathématiciens)

$$H_n(f) = c_{-n}(f)e^{-i\frac{2\pi n}{T}x} + c_n(f)e^{i\frac{2\pi n}{T}x} \quad \text{où} \quad \begin{cases} c_n(f) & = & \frac{1}{2}(a_n(f) + ib_n(f)) \\ c_{-n}(f) & = & \frac{1}{2}(a_n(f) - ib_n(f)) \end{cases}$$

Remarque – *La famille de fonctions* $e_n : x \mapsto e^{i\frac{2\pi n}{T}x}$ *est une famille orthonormale des fonctions* T*-pérodiques de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{C}$ *pour le produit scalaire hermitien* $\langle f, g\rangle = \frac{1}{T}\int_T f(x)\overline{g}(x)dx$.
Si f *est une fonction* T*-périodique à valeurs complexe, les* **coefficients de Fourier complexes** $(c_n(f))_{n\in\mathbb{Z}}$ *sont donnés par*

$$c_n(f) = \frac{1}{T}\int_T f(x)e^{-i\frac{2\pi n}{T}x}dx. \tag{4}$$

La parité d'une fonction se traduit sur les coefficients de Fourier. Ansi, si f est une fonction paire, alors $b_n(f) = 0$ pour tout n, si f est une fonction impaire, alors $a_n(f) = 0$ pour tout n.

Définitions – *On appelle* **série de Fourier** *la série de fonction* $\sum H_n(x)$. *Le polynôme trigonométrique* $S_n(f)$, *somme partielle* n*-ième terme de la série de Fourier, s'écrit donc en fonction de la représentation choisie*

$$S_n(f)(x) = a_0(f) + \sum_{k=1}^{n} a_k(f)\cos(\frac{2\pi k}{T}x) + b_k(f)\sin(\frac{2\pi k}{T}x)$$

ou bien $S_n(f)(x) = \rho_0 + \sum_{k=1}^{n} \rho_k \cos(\frac{2\pi k}{T}x + \theta_k)$ *ou encore* $S_n(f)(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k(f)e^{i\frac{2\pi k}{T}x}$.
Enfin on dit qu'une **fonction est développable en série de Fourier** *si* $S(f) := \lim_{n\to\infty} S_n(f) = f$.

La théorie de Fourier s'est développée tout au long du XIXeme siècle. Elle répond à la question suivante : à quelles conditions une fonction T-périodique est-elle développable en séries entières.

Des Théorèmes de convergence

Les théorèmes de convergence précisent sous quelles conditions on peut reconstituer une fonction T-périodique f à partir de sa série de Fourier, c'està dire sous quelles conditions f est dévelopable en série de Fourier.

Proposition – *Si on suppose que la série de Fourier converge absolument, alors $f(x) = S(f)(x)$ pour tout x dans $\mathbb{R}$. On dit que f est développable en série de Fourier.*

Théorème (égalité de Parseval) – *Pour une fonction T-périodique continue par morceaux f, ou plus généralement de carré intégrable sur une période, l'égalité de Parseval affirme la convergence de la série numérique $\sum |a_n|^2 + |b_n|^2$ (ou de manière équivalente la convergence de de $\sum |c_n|^2$) et l'identité :*

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2 = |a_0|^2 + \frac{1}{2}\left(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 + |b_n|^2\right) = \frac{1}{T}\int_T |f(x)|^2 dx.$$

L'égalité de Parseval implique en particulier que les coefficients de Fourier de f tendent (suffisamment vite) vers 0 en l'infini. Suivant les hypothèses de régularité sur f, la vitesse de convergence peut être précisée.

Théorème de convergence simple de Dirichlet – *Pour une fonction T-périodique f, dérivable à droite et à gauche en x, on a la convergence de sa série de Fourier $S(f)$ évaluée en x et on a l'égalité :*

$$S(f)(x) = \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2}.$$

La démonstration du théorème se base sur le fait que la série de Fourier se calcule par produit de convolution avec un polynôme trigonométrique aux propriétés remarquables : le noyau de Dirichlet.

Le théorème de convergence uniforme de Dirichlet est une version globale du théorème de convergence ponctuelle.

Théorème de convergence uniforme de Dirichlet – *Pour une fonction T-périodique f, continûment dérivable au voisinage de tout point d'un segment I, la série de Fourier de f converge uniformément vers f sur I.*

Phénomène de Gibbs – *Le phénomène de Gibbs est un effet de bord observé au voisinage d'une discontinuité de la fonction.*

Le polynôme trigonométrique somme partielle d'ordre n de la série de Fourier, $S_n(f)$, est une fonction continue, il est donc normal qu'il ne puisse approcher uniformément la fonction créneau qui, elle, ne l'est pas. Sur une des zones de plateau, en dehors d'un voisinage de la discontinuité, cependant, la série de Fourier converge uniformément vers la fonction. Au niveau du point de discontinuité, $S_n(f)$ subit une forte oscillation, une sorte de sursaut. Plus précisément, si la fonction a une discontinuité d'amplitude Δy, alors S_n, tout en restant continue, connaîtra un saut en ordonnée valant de l'ordre de 18% de plus.

Convergence en moyenne quadratique – La convergence en moyenne quadratique concerne la convergence pour la norme hermitienne : $\|f\|^2 = \frac{1}{T}\int_T |f(x)|^2 dx$ définie par exemple sur l'espace E des fonctions T-périodiques et continues.

Théorème de convergence en moyenne quadratique – *Pour toute fonction T-périodique f, telle que $\|f\|_2 = \sqrt{\frac{1}{T}\int_T |f(x)|^2} < \infty$, la série de Fourier de f converge vers f en moyenne quadratique (c'est à dire $\|f - S_n(f)\|_2 \to 0$).*