Université de Paris-Est Marne-la-Vallée
Licence de Mathématiques-Informatique 1ère année

FORMATION PREPARATOIRE TUTOREE en MATHEMATIQUES

Année Universitaire 2017-2018

FORMATION PREPARATOIRE TUTOREE 2017 en MATHEMATIQUES : Sommaire de la Banque d'exercices.

PRESENTATION DE LA BANQUE D'EXERCICES DE MATHS : ORGANISATION GENERALE, ESPRIT ET FINALITES.

I/ Organisation générale de la banque d'exercices.

La banque d'exercices de Mathématiques donnée ci-après se constitue de *six* sections de plusieurs exercices chacune, une section portant sur un thème bien déterminé :
1) Nombres complexes, 2) Calculs algébriques dans $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$, 3) Fonctions numériques réelles, 4) Fonctions et suites numériques, 5) Intégration, 6) Géométrie.

Chaque section fait l'objet en classe, d'une séance d'une heure et demie de recherche de solutions et de commentaires de ces exercices, dirigés par un tuteur (bon étudiant de fin de Licence ou de Mastère de Mathématiques).

Des éléments du cours de terminale S peuvent être rappelés, voire même présentés pour la première fois aux étudiants provenant de filières ES (cas de la section sur les nombres complexes, non étudiés en terminales ES), et faire l'objet de démonstrations demandées.

Au sein d'un thème général donné, on trouvera à chaque fois plusieurs thématiques particulières, avec souvent un premier exercice assez simple, et un second plus délicat, dit *d'approfondissement* des connaissances.

Les thématiques choisies sont censées apporter des compléments de connaissances aux nouveaux bacheliers, et leur faire travailler et apprendre des techniques plus délicates, peu, voire pas du tout familières au niveau lycée, et cependant nécessaires en vue de pouvoir suivre correctement les enseignements de Mathématiques de la Licence.

Il s'agit donc ici d'une véritable mise à niveau en vue de la Licence, d'une formation préparatoire à celle-ci, à travers l'étude de thématiques ciblées, visant des *carences précises* trouvées chez les élèves sortant du lycée (calcul algébrique, trigonométrie…).

II/ Esprit et finalité de la banque d'exercices proposée.

Les exercices proposés ne constituent pas de simples *applications directes* du cours de terminale, surtout les exercices d'approfondissement et de compléments, ce qui tranche totalement avec l'esprit du lycée, notamment par rapport à une filière ES.

L'esprit est totalement différent et les exercices sollicitent de la réflexion.

Ils exigent plus d'initiative personnelle, d'autonomie, que notamment, des problèmes de Baccalauréat, en général très *directifs* et *assistés* au niveau de *l'énoncé.*

Ces exercices, souvent *techniquement* plus difficiles, visent aussi, parfois, un niveau de généralité plus élevé (par exemple, on ne considèrera pas ici que des suites ou des fonctions *particulières*). Des capacités de calcul et un travail quotidien de la mémoire, bien plus élevés qu'au lycée, sont mis en évidence dans les taches ici proposées.

L'intérêt de ces exercices d'approfondissement tient dans le fait qu'ils se situent déjà *qualitativement* dans l'esprit de l'enseignement, des exigences nouvelles de *l'université,* même si, *en apparence*, ils ne mettent en jeu que des notions *du lycée* (filière S).

Ils préparent donc très utilement les étudiants qui les travailleront lors de ces séances de tutorat à la première année de Licence, et favoriseront l'adaptation à celle-ci.

Objectifs d'apprentissage, section par section :

Introduction : L'accent mis sur la mémorisation et les taches de calcul.

L'importance donnée aux calculatrices et formulaires, au lycée, comme le développement des indications fournies jusqu'au Baccalauréat dans les sujets de devoirs sur table ou les exercices ordinaires en classe (aides à la résolution, rappels de formules de cours, annonce du résultat à trouver, sur-découpage d'un problème en sous-questions…) a *deux* conséquences fort *néfastes* pour l'apprentissage des Mathématiques :

1) Les élèves au lycée apprennent et savent, de fait, très peu de choses par cœur, ce qui freine considérablement leur progression et leur capacité à s'adapter à l'enseignement supérieur, où la somme des *connaissances utiles* dans la pratique quotidienne explose par rapport au lycée, où les hésitations, les tâtonnements sur des notions et résultats banals se payent donc « cash ».

2) Ces mêmes élèves arrivent à l'université avec des capacités techniques, surtout de calcul, en très nette baisse par rapport à celles de leurs prédécesseurs, tout simplement parce que les exigences du lycée dans ce domaine ont diminué. Cela les rend très dépendants de l'énoncé et des aides à la résolution données par l'enseignant. Ainsi fragilisés, ils manquent de confiance en eux, d'autonomie, dès qu'ils se retrouvent à l'Université face à un calcul plus long et plus exigeant que ce qui leur était demandé au lycée, et auquel ils ne sont donc pas habitués.

La conclusion s'impose d'elle-même : Il n'est pas pensable de pouvoir suivre avec succès une formation supérieure en Mathématique sans un effort de mémorisation *particulier* et *nouveau*, et un travail d'entrainement très assidu et poussé au niveau des techniques de calcul.
C'est la raison pour laquelle on précise ci-dessous, section par section, les notions et résultats exposés dans ces sections qui sont *dès à présent* à retenir par cœur pour le rôle essentiel qu'ils vont jouer au cours de la Licence, ainsi que les techniques de calculs (parfois nouvelles), qui vont servir le plus souvent en Licence, et doivent donc être rapidement très bien maitrisées.
Ajoutons que cette brochure doit être soigneusement conservée et régulièrement consultée par l'étudiant tout au long de la première année de Licence, pour toutes les références très utiles qu'elle contient…

Objectifs d'apprentissage de la section 1 :
Les notions de cours rappelées dans cette section (et provenant du programme de TS) sont à connaitre par cœur, avec leurs interprétations géométriques. La *« technique de la quantité conjuguée »*, comme celles permettant de passer d'un système de représentation d'un nombre complexe à un autre (formes algébrique, géométrique, exponentielle) doivent être apprises.
Objectifs d'apprentissage de la section 2 :
La partie I porte sur les techniques d'écriture d'un polynôme comme produit de facteurs de degré 1 et le lien avec la résolution d'équations, ce qui est fondamental et très mal connu des lycéens. La partie II porte, elle, les inégalités et les inéquations et leurs « pièges » habituels. L'interprétation géométrique du module et de la valeur absolue sont au cœur de la partie III, qui présente aussi l'inégalité triangulaire, essentielle pour la Licence et à connaitre par cœur. Il en va de même de la très importante formule des sommes géométriques dans la partie IV.
Objectifs d'apprentissage de la section 3 :
Cette section porte notamment sur le rappel et la démonstration de résultats de limites usuelles à connaitre par cœur, et l'application de techniques de calcul de limites encore mal maitrisées au lycée. Elle porte aussi sur des taches de nature graphique auxquelles les élèves du lycée ne sont plus habitués du fait de leur utilisation des calculatrices, et leurs liens avec l'algébrique. La maitrise de la trigonométrie et des études de fonctions complète les objectifs de la section.
Objectifs d'apprentissage de la section 4 :
Etude de suites arithmético-géométriques, calculs de limites de suites, liens avec les *fonctions* via l'étude de suites récurrentes et étude de conjectures alimentent cette section.
Objectifs d'apprentissage de la section 5 :
Calculs d'intégrales, de primitives (à connaitre !) usuelles, et d'aires, *initiation* à la méthode d'intégration par parties, taches de majoration/minoration d'intégrales pour l'étude de suites d'intégrales et le calcul de leur limite, ou de fonctions définies par une intégrale.
Objectifs d'apprentissage de la section 6 :
Géométrie et complexes, équations de droites dans le plan, de droites, de plans dans l'espace, représentations paramétriques, orthogonalité, distances, sphère, cône, cylindre, volumes…

SECTION 1 : NOMBRES COMPLEXES.

I/ NOTIONS DE COURS (*illustrées d'exercices d'application directe*) :

1) Définitions et notations : Forme algébrique d'un nombre complexe.

On appelle *nombre imaginaire*, noté i, le nombre vérifiant $i^2 = -1$
On appelle *nombre complexe*, tout nombre de la forme : $z = a + ib$, où a et b sont deux réels.
Le réel a est appelé *partie réelle* du nombre complexe z, ce qu'on note : $a = \text{Re}(z)$, et le réel b est appelé *partie imaginaire* du complexe z, ce qu'on note : $b = \text{Im}(z)$.
Lorsque $a = 0$, c'est-à-dire si $z = ib$, on parle de *nombre imaginaire pur*.
On note $\mathbb{C}$, l'ensemble des *nombres complexes*.
L'expression $z = a + ib$ d'un nombre complexe est appelée sa *forme algébrique*.

2) Premières propriétés :

On admettra que les règles de calculs dans $\mathbb{C}$ sont les mêmes que dans $\mathbb{R}$, et qu'en particulier si on pose : $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$ pour $z \in \mathbb{C}$ et $z' \in \mathbb{C}$ (a, b, a', b' étant des réels), on a :

a) $z + z' = (a + a') + i(b + b')$,

b) $\alpha z = (\alpha a) + i(\alpha b)$ et $\alpha(z + z') = \alpha z + \alpha z'$ pour $\alpha \in \mathbb{R}$,

c) $(\alpha + \beta)z = \alpha z + \beta z$ pour α, β réels

d) $(ib)(ib') = i^2 bb' = -bb' \ldots$

***Exercice 1 d'application directe* :**

Simplifiez les expressions suivantes et mettez ces nombres complexes sous forme algébrique :
$A = 2(1-3i) + 5(2+2i+1-i)$; $B = (3-2i)(-4+6i)$; $C = (3-5i)(3+5i)$; $D = (6-5i)^2$.
Parmi ces complexes, y a-t-il un nombre réel ? Un nombre imaginaire pur ? Si oui lesquels ?
Calculer, plus généralement, pour $z = a + ib$, $z' = a' + ib'$, le produit $z.z'$. Voir que $z.z' = z'.z$.

3) Représentation géométrique associée à la forme algébrique, nouvelles définitions :

Rappelons ici que l'ensemble $\mathbb{R}$ se représente par une droite orientée par un repère $(O, \vec{u})$, chaque réel x étant représenté par le point M d'abscisse x sur cette droite dite *« droite réelle »*.
L'ensemble $\mathbb{C}$ est, quant à lui, représenté par un plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$.
Chaque nombre complexe $z = a + ib$ est représenté par le point M de ce plan, de coordonnées a et b dans ce plan, qui est aussi appelé alors *« plan complexe »*.
On dit que le complexe z est *l'affixe du point M* dans le plan muni du repère orthonormé.

On appelle *conjugué* d'un nombre complexe z, le complexe noté $\bar{z}$, défini par : $\bar{z} = a - ib$.
On appelle *module* de z, noté $|z|$, le réel positif ou nul $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

***Exercice 2 d'application directe* :**

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$, indiquez les points A, B, C, D d'affixes respectifs $4 + i$, $2 - 3i$, $-2i$ et $-1 + i$.
Si un point M a pour affixe z, comment se définit le point M' d'affixe $\bar{z}$, conjugué de z ?
Que représente le module $|z|$ d'un point de vue géométrique dans cette situation ?

***Exercice 3 d'application directe* :**

Soit z, z' deux nombres complexes (on pourra poser $z = a + ib$, $z' = a' + ib'$; a, b, a', b' réels)

a) Prouver que $z\bar{z} \in \mathbb{R}_+$ et que $|z| = \sqrt{z.\bar{z}}$. Préciser $\bar{\bar{z}}$. En déduire que l'on a : $|\bar{z}| = |z|$.

b) Montrer que : $\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z}'$, $\overline{z.z'} = \bar{z}.\bar{z}'$. En déduire que : $|z.z'| = |z||z'|$.

***Exercice 4 d'application directe* : Technique de la quantité conjuguée.**

1°) En multipliant la fraction au numérateur et au dénominateur par le complexe conjugué du dénominateur, écrire sous forme algébrique les nombres complexes : $A = \frac{1-2i}{3i}$ et $B = \frac{1+3i}{2-5i}$.

2°) Ecrire plus généralement sous forme algébrique le quotient *z/z'*, si $z = a+ib$, $z' = a'+ib'$

4) Forme trigonométrique d'un complexe / représentation géométrique.

Un point du plan d'affixe $z = a+ib$ peut se définir autrement que par ses coordonnées *a* , *b* cartésiennes. Il peut aussi se définir par la distance , notée ρ, qui le sépare du centre *O* du repère et l'angle θ que fait la droite orientée (OM) avec l'axe orienté (OX) des abscisses.

***Exercice 5 d'application directe* :**

a) Faites un dessin pour expliquer cela. Que vaut ρ selon *a* et *b* ? Qu'est-ce donc que ρ ?

b) Montrer que pour $z \in \mathbb{C}^*$ $(z \neq 0)$, on a : $z = \rho(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$, où $\rho > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$.

Définition : L'angle θ est appelé *l'argument* du complexe *z*, et ρ est donc son *module*.

5) Forme exponentielle d'un nombre complexe.

On pose : $\cos(\theta) + i\sin(\theta) = e^{i\theta}$. Nous allons montrer en quoi cette notation est *légitime*.

1°) Déterminer ce que valent les nombres complexes $\cos(\theta) + i\sin(\theta)$ et $e^{i\theta}$ pour $\theta = 0$.

Montrer que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on a : $e^{-i\theta} = \frac{1}{e^{i\theta}}$.

2°) Montrer que pour tous réels θ, θ' on a : $e^{i(\theta+\theta')} = e^{i\theta}.e^{i\theta'}$, puis que $(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$ pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, et tout $n \in \mathbb{N}$. Comparer alors $[\cos(\theta) + i.\sin(\theta)]^n$ et $\cos(n\theta) + i.\sin(n\theta)$.

3°) Etablir les formules d'Euler : $\cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$ et $\sin(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$ pour tout $\theta \in \mathbb{R}$.

II/ EXERCICES D'APPROFONDISSEMENT :

Exercice 1 :

1°) Vrai ou faux : $\frac{1+i}{1-i} = e^{-i\pi/2}$? $\frac{\sqrt{3}+i}{1-i} = \sqrt{2}.e^{5i\pi/12}$? Calculer $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{27}$ et $\left(\frac{\sqrt{3}+i}{1-i}\right)^{27}$.

2°) Déduire de ce qui précède les valeurs de $\cos(\frac{\pi}{12})$ et de $\sin(\frac{\pi}{12})$.

3°) Déterminez module et argument du nombre complexe : $Z = \frac{\cos(\theta) + i\sin(\theta)}{\cos(\theta) - i\sin(\theta)}$, où $\theta \in \mathbb{R}$.

Déterminez Z^n sous forme algébrique, en fonction de $\theta \in \mathbb{R}$ et de $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 2 :

On pose, pour $z \in \mathbb{C}$ et $z' \in \mathbb{C}$: $z = x+iy$ et $z' = x'+iy'$, où x, y, x', y' sont quatre réels. Que représente géométriquement le module $|z - z'|$ si z, z' désignent les affixes de points M et M' du plan complexe (P) muni d'un repère orthonormé ? Justifiez votre réponse.

Application : Déterminez l'ensemble des points du plan complexe d'affixe z vérifiant :

a) $|z-1+i| = 2$, puis b) $|z-1+i| = |z-i|$, et les équations en x, y définissant ces ensembles.

SECTION 2 : CALCULS ALGEBRIQUES DANS $\mathbb{R}$ OU $\mathbb{C}$.

I/ RESOLUTIONS D'EQUATIONS, POLYNOMES.

Exercice 1 : *Racines évidentes de polynômes*…

1°) *Sans calculs*, dites si le polynôme $P(x)=x^2+4x-5$ peut s'écrire, ou non, sous la forme : $(x-1)(x+a)$, où a est un réel. L'écrire alors comme produit de facteurs du premier degré.

2°) *Sans calculs*, dites si le polynôme $Q(x)=x^3-2x^2-x+2$ pourra s'écrire sous la forme : $(x-1)(x^2+a'x+b')$, où a',b' sont des réels. Résoudre alors dans $\mathbb{R}$ l'équation : $Q(x)=0$.

3°) Soit α un réel, P un polynôme. A quelle condition, nécessaire et suffisante, $P(\alpha)=0$?

Exercice 2 : *A effectuer sans calculer aucun discriminant*…

1°) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations : $x^3+x^2-4x-4=0$ et $(x-2)(3x+5)=(2x-1)(4-2x)$.

2°) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations : $x^3-x^2=x^2-x$; $x^3-5x^2+4x=0$; $x^2-24x+135=0$.

3°) *Attention au radical* ! Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $x+1=x^2$ et l'équation : $\sqrt{x+1}=x$.

II/ INEGALITES ET INEQUATIONS :

Exercice 1 : Inégalités dans $\mathbb{R}$.

1°) Soient deux réels a,b vérifiant : $2\le a\le 6$ et $1\le b\le 2$.
Encadrer aussi précisément que possible les réels $a+b$, ab, $a-b$ et a/b.

2°) Même question si a,b vérifient : $-3<a\le 2$ et $-4\le b<-1$.

Exercice 2 : Inéquations dans $\mathbb{R}$.

1°) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $x^2+2x-3>0$, puis l'inéquation : $x+2>\dfrac{3}{x}$.

2°) Même question avec les inéquations : $x^2-x\le 6$ et $x-1\le\dfrac{6}{x}$.

III/ MODULES ET VALEURS ABSOLUES :

Exercice 1 :

On pose, pour $z\in\mathbb{C}$ et $z'\in\mathbb{C}$: $z=x+iy$ et $z'=x'+iy'$, où x,y,x',y' sont quatre réels.

1°) Rappeler l'expression de $|z|$ en fonction de x,y. Donner selon le signe de x, l'expression simplifiée de $|z|$, si z est réel ($y=0$ et $z=x$). Comment se nomme le module d'un réel ?

2°) A quelle grandeur géométrique est égal le terme $|z-z'|$ si z,z' désignent les affixes de deux points M et M' du plan (P) muni d'un repère orthonormé ? Même question pour $|x-x'|$ où x,x' désignent les abscisses de deux points A et A' de l'axe réel (Δ) orienté.

3°) Application :

(1) Déterminer l'ensemble des points du plan complexe d'affixe z vérifiant :
a) $|z-1|\le 3$; b) $|z-1|\le|z+3|$ et les équations en x,y définissant ces ensembles.

(2) Résoudre géométriquement sur $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :
a) $|x-1|\le 3$; b) $|x-1|\le|x+3|$; c) $|x-x_0|<\alpha$, où $x_0\in\mathbb{R}$ et $\alpha>0$.

Exercice 2 : Approfondissement : Inégalité triangulaire.

1°) Constater que pour tout réel x, on a : $|x| = Max(x, -x)$, où $Max(a,b)$ désigne le plus grand des deux réels a et b.
Utiliser cette expression de $|x|$ pour démontrer l'inégalité suivante, valable pour tous réels a, b, et appelée inégalité triangulaire (sur $\mathbb{R}$) : $|a+b| \leq |a| + |b|$.
Dans quels cas a-t-on cette inégalité devient-elle une égalité ? Démonstration.

2°) Nous allons démontrer ici que l'inégalité triangulaire s'étend à l'ensemble $\mathbb{C}$, c'est-à-dire qu'on a : $|z+z'| \leq |z| + |z'|$ pour tous nombres complexes z, z'.

a) Etablir l'égalité : $|z+z'|^2 = |z|^2 + |z'|^2 + 2\operatorname{Re}(z\overline{z}')$, et l'inégalité : $\forall u \in \mathbb{C}\ \ |\operatorname{Re}(u)| \leq |u|$.
b) En déduire l'inégalité triangulaire sur $\mathbb{C}$. L'interpréter géométriquement dans le plan.
c) Dans quels cas cette inégalité devient-elle une égalité ? Démonstration.

IV/ CALCULS DE SOMMES GEOMETRIQUES DANS $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Exercice 1 :

1°) Développer et simplifier le polynôme : $P(x) = (1-x)(1+x+...+x^n)$, où $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$.

2°) En déduire la valeur de la somme $S_n = \sum_{k=0}^{n} x^k = 1 + x + ... + x^n$ en fonction de x et n, d'une part pour $x \neq 1$, et d'autre part pour $x = 1$. Généraliser ces résultats à tout complexe z.

Exercice 2 : Approfondissements et compléments (*astuce de l'angle moitié*).

1°) Soit $\theta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. Calculer, en fonction de n et de θ, la somme $T_n(\theta) = \sum_{k=0}^{n} e^{ik\theta}$.

2°) Dans le cas où θ n'est pas un multiple de 2π, écrire l'expression de $T_n(\theta)$ à l'aide de sinus et d'une seule exponentielle complexe, sous la forme $\pm\ \rho e^{i\alpha}$ avec $\rho > 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

3°) En déduire pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, les expressions de $U_n(\theta) = \sum_{k=0}^{n} \cos(k\theta)$ et $V_n(\theta) = \sum_{k=1}^{n} \sin(k\theta)$ en fonction de n et θ. On discutera selon que θ est, ou n'est pas, un multiple de 2π.

V/ COMPLEMENT : EQUATIONS du SECOND DEGRE ayant des SOLUTIONS dans $\mathbb{C}$.

Soit a, b, c trois réels, avec $a \neq 0$ et $b^2 - 4ac < 0$. L'équation du second degré, d'inconnue z, $az^2 + bz + c = 0$, n'a donc pas de solutions réelles…Mais elle va avoir 2 solutions complexes :

1°) Montrer que cette équation équivaut à : $z^2 + 2\dfrac{b}{2a}z + \dfrac{c}{a} = 0$.

2°) En déduire qu'elle équivaut à l'équation : $(z + \dfrac{b}{2a})^2 + \dfrac{\delta}{4a^2} = 0$, où $\delta > 0$ est à préciser.

3°) En écrivant δ sous la forme : $\delta = -i^2\delta$, finir la résolution de l'équation du second degré.

4°) Application : Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations : $z^2 - 2z + 2 = 0$ et $z^2 + 2z + 4 = 0$. Donner les solutions obtenues sous forme exponentielle, après avoir trouvé leur module et argument.

<u>SECTION 3</u> : <u>FONCTIONS NUMERIQUES REELLES</u>.

I/ <u>CALCUL DE LIMITES USUELLES</u> :

<u>Exercice 1</u> : On rappelle les résultats usuels de terminale S, *à connaitre par cœur* en Licence :

a) $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\dfrac{x}{e^x}=0$; b) $\forall\alpha>0\ \forall\beta>0\ \lim_{x\to+\infty}\dfrac{(\ln(x))^\alpha}{x^\beta}=\lim_{x\to+\infty}\dfrac{x^\alpha}{e^{\beta x}}=0$;

c) $\lim_{x\to0}\dfrac{e^x-1}{x}=1$; d) $\lim_{x\to0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=1$; e) $\lim_{x\to1}\dfrac{\ln(x)}{x-1}=1$; f) $\lim_{x\to0}\dfrac{\sin(x)}{x}=1$.

$\rightarrow$ Vous allez <u>démontrer</u> ou <u>retrouver</u> vous-mêmes ces résultats très classiques à connaitre :

1°) Etudier les variations de $\varphi : x\to\varphi(x)=\ln(x)-\sqrt{x}$ sur l'intervalle $[1,+\infty[$.

2°) En déduire l'encadrement : $\forall x\in[1,+\infty[\ \ 0\le\ln(x)\le\sqrt{x}$, puis la valeur de $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x)}{x}$.

3°) En posant $u=\ln(x)$ dans la limite précédente, en déduire la valeur de $\lim_{u\to+\infty}\dfrac{u}{e^u}$.

4°) On pose $A(x)=\dfrac{(\ln(x))^\alpha}{x^\beta}$ et $B(x)=\dfrac{x^\alpha}{e^{\beta x}}$, où $\alpha>0$ et $\beta>0$. Simplifier les expressions de $\ln(A(x))$ et $\ln(B(x))$, puis calculer la limite de ces termes en $+\infty$ en utilisant le résultat de a)

5°) On rappelle la <u>définition</u>, *à connaitre par cœur*, du <u>nombre dérivé</u> d'une fonction f en un point a où f est dérivable : $f'(a)=\lim_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$. Utiliser cette définition, et la dérivée de $x\to e^x$, $x\to\ln(1+x)$,…etc. pour retrouver les résultats donnés en c), d), e), f).

<u>Exercice 2</u> : <u>Approfondissement</u> : <u>Calcul d'autres limites</u>…

En utilisant diverses techniques, dont certaines ont déjà été exposées ci-dessus (factoriser par le terme prépondérant, considérer la quantité conjuguée (cas des racines carrées), reconnaitre la limite d'un taux d'accroissement, utiliser le théorème des gendarmes, poser une nouvelle variable $u=f(x)$, passer au log…), calculer les limites suivantes :

1) $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{x}{\ln(x)}$; 2) $\lim_{x\to1^+}\dfrac{x}{\ln(x^2)}$; 3) $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{3x^2+5x+7}{x^3-4x+1}$; 4) $\lim_{x\to0}\dfrac{x}{\sqrt{x+1}-1}$;

5) $\lim_{x\to0}\dfrac{x}{e^{3x}-1}$; 6) $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{\sin(x)}{x}$; 7) $\lim_{x\to-\infty}x\sin(\frac{1}{x})$; 8) $\lim_{x\to0}\dfrac{\sin(\pi x)}{\ln(1+x)}$; 9) $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x)}{e^x}$;

10) $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$; 11) $\lim_{x\to1}\dfrac{\sqrt{x}-1}{\ln(x)}$; 12) $\lim_{x\to+\infty}x+\cos(x)$; 13) $\lim_{x\to\pi/6}\dfrac{2\cos(x)-\sqrt{3}}{2\sin(x)-1}$.

II/ <u>ACTIVITES GRAPHIQUES – LIEN AVEC L'ALGEBRIQUE.</u>

<u>Exercice 1</u> :

Sans effectuer d'étude de fonction, ni utiliser de calculatrice, tracer les graphes des fonctions suivantes : 1) $f:x\to\sin(x)$; 2) $g:x\to\cos(x)$; 3) $h:x\to1-x^2$; 4) $k:x\to(x-1)^2$;

5) $u:x\to\dfrac{1}{x-1}$; 6) $v:x\to\sqrt{x-1}$; 7) $w:x\to\dfrac{1}{1+x^2}$; 8) $\varphi:x\to\ln(x+1)$.

Donner un exemple de fonction comportant une exponentielle, qui soit paire, tend vers 0 à l'infini, et admet un maximum en 0. Idem en remplaçant « *maximum* » par « *minimum* ».

Exercice 2 : *En utilisant cette fois une étude de fonction…*

1°) Démontrer que l'équation : $e^x = 1 + x$ admet une unique solution (à préciser) dans $\mathbb{R}$.
Démontrer l'inégalité : $\forall x \in \mathbb{R} \quad e^x \geq 1 + x$, puis interpréter graphiquement cette inégalité.

2°) Mêmes questions pour l'équation : $\ln(1+x) = x$, et l'inégalité : $\forall x \geq 0 \quad \ln(1+x) \leq x$.

3°) Démontrer les inégalités : $\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}] \quad \frac{2}{\pi} x \leq \sin(x) \leq x$, puis interpréter graphiquement.

4°) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $\frac{e^x - 3}{e^x - 5} = \frac{1}{2}$. Démontrer : $\forall x > 0 \quad \ln(1+x^2) \geq \ln(2) + \ln(x)$.
Procède-t-on ici de la même façon que dans les questions précédentes. Pourquoi ?

III/ LA TRIGONOMETRIE FACILE :

Exercice 1 : Retrouver les formules de trigonométrie usuelles.

1°) Soit a, b deux réels. En identifiant $e^{i(a+b)}$ et $e^{ia}e^{ib}$, à écrire sous forme algébrique, trouver les formules de $\cos(a+b)$ et $\sin(a+b)$. En déduire les formules de $\cos(a-b)$, $\sin(a-b)$.

2°) En déduire les formules de $\cos(2x)$, $\sin(2x)$,et de $\cos(\pi \pm x)$, $\sin(\pi + x)$, $\sin(\pi - x)$, et $\cos(\pi/2 + x)$, $\cos(\pi/2 - x)$, $\sin(\pi/2 \pm x)$. Retrouver aussi : $\forall x \in \mathbb{R} \quad \cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$.

3°) Poser $u = a + b$, $v = a - b$; en déduire les formules de $\cos(u) \pm \cos(v)$ et $\sin(u) \pm \sin(v)$.

Exercice 2 : Fonctions trigonométriques.

Sans étude de fonction, ni calculatrice, tracer les graphes de $f : x \to \sin(2x)$, $g : x \to \sin(x/2)$ $h : x \to \cos(2x)$. Donner l'équation de la tangente à la courbe de h au point d'abscisse $\pi/4$.
Etudier la fonction tangente et tracer sa courbe (à la main !). Retrouver sa dérivée (quotient).

IV/ ETUDE DE FONCTIONS :

Exercice 1 :

1°) Citer un exemple simple de fonction non continue en un ou plusieurs points, puis un exemple de fonction continue en tout point, mais non dérivable en un ou plusieurs points.

2°) Sans calculatrice, trouver les variations de f définie pour tout $x > 0$ par : $f(x) = \frac{\ln(x)}{x}$.
Déterminer par le calcul les droites asymptotes à la courbe de f. Montrer que l'équation $f(x) = \frac{1}{3}$ admet deux solutions réelles. En préciser une valeur approchée à 0,01 près.

Exercice 2 :

On considère la fonction f, définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x.\ln(|x|)$ si $x \neq 0$, et $f(0) = 0$.

1°) Montrer que f est une fonction impaire. Que peut-on en déduire pour son graphe ?

2°) Rappeler la valeur de $\lim_{u \to +\infty} \frac{\ln(u)}{u}$. En déduire $\lim_{x \to 0} f(x)$; f est-elle continue en 0 ?

3°) Calculer $\lim_{h \to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h}$. f est-elle dérivable en 0 ? Interpréter graphiquement.

4°) Dresser le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}_+$. Donner $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$.

5°) Trouver, sur $\mathbb{R}_+^*$, le point d'intersection de la courbe représentative de f avec l'axe des abscisses, et donner l'équation de la tangente à cette courbe en ce point.

6°) Tracer la courbe représentative de f sur $\mathbb{R}$, et la tangente définie.

<u>SECTION 4</u> : <u>SUITES NUMERIQUES REELLES</u>.

I/ <u>SUITES ARITHMETIQUES, GEOMETRIQUES, ARITHMETICO-GEOMETRIQUES</u> :

<u>Exercice 1</u> :

1°) Soit a un nombre réel. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $u_{n+1} = u_n + a$, $u_0 = \alpha$.
Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n en fonction de α, a et n. Déterminer, selon la valeur de a, la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Comment appelle-t-on cette suite ?

2°) Soit a un réel. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = a^n$ et $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + u_1 + ... + u_n$.
Déterminer, selon la valeur du réel a, l'existence et la valeur des limites des deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Comment appelle-t-on la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

<u>Exercice 2</u> : <u>Approfondissement-Complément :</u>

A/ On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_0 = 2$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 3u_n - 2$.

1°) Trouver le réel λ tel que : $\lambda = 3\lambda - 2$. Etablir que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour tout n par : $v_n = u_n - \lambda$ est géométrique. Calculer v_n en fonction de n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2°) En déduire l'expression de u_n selon n, pour tout $n \in \mathbb{N}$, et donner la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

B/ Soit a, b deux réels fixés non nuls, $a \neq 1$. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, définie par son premier terme u_0 et la relation : $u_{n+1} = au_n + b$, valable pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1°) Déterminer λ tel que : $\lambda = a\lambda + b$. Etablir que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour tout n par : $v_n = u_n - \lambda$ est géométrique. Calculer v_n en fonction de n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2°) En déduire l'expression de u_n selon n, pour tout $n \in \mathbb{N}$. Discuter la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

II/ <u>ETUDE D'AUTRES SUITES NUMERIQUES</u> :

<u>Exercice 1</u> :

1°) Calculer les limites des suites de termes généraux suivants, si ces limites existent :

a) $u_n = \lim_{n\to+\infty} \dfrac{\ln(n)}{n^2+1}$; b) $v_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}.(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})}$; c) $w_n = \dfrac{2^n + (-e)^n}{2^n + n}$; d) $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{\sin(n)}{n}$

e) $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{e^n - 1}{n}$; f) $y_n = n\ln(n+1) - n\ln(n)$; g) $\lim_{n\to+\infty} 2\sqrt{n} - n + \sin(n)$.

2°) On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de terme général défini pour tout n de $\mathbb{N}^*$ par la relation :

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{2n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{2n^2+2}} + ... + \frac{1}{\sqrt{2n^2+n}}$$

A l'aide d'un encadrement adéquat de u_n, montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et trouver sa limite.

<u>Exercice 2</u> : <u>Approfondissement 1</u> : <u>suites adjacentes.</u>

On considère les deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, définies respectivement pour tout n de $\mathbb{N}^*$ par : $u_n = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k^2}$, et $v_n = u_n + \dfrac{1}{n}$.

1°) Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante et que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante.

2°) Vérifier que pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $u_n \leq v_n$. En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont bornées.

3°) Montrer enfin que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ convergent et admettent la même limite.

<u>Exercice 3</u> : <u>Approfondissement 2</u> : Une limite inattendue !

On pose : $u_n = (1+\dfrac{1}{n})^n$ pour tout n de $\mathbb{N}^*$. A votre avis, quelle est la limite de cette suite ?

Vérifiez votre intuition en testant des valeurs sur votre calculatrice. Aviez vous raison ?

Donner $\ln(u_n)$, puis la valeur de $\lim_{n\to+\infty} \ln(u_n)$. En déduire la valeur de $\lim_{n\to+\infty} u_n$.

Comment peut-on expliquer un tel résultat ?

III/ <u>ETUDE DE SUITES RECURRENTES</u> :

<u>Exercice 1</u> :

Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, définie par : $u_0 = 1$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = u_n - \dfrac{1}{3}u_n^{\ 3}$.

1°) Etudier les variations sur $\mathbb{R}$ de la fonction $f : x \to f(x) = x - \dfrac{1}{3}x^3$.

2°) Démontrer, par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, que l'on a : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0,1]$.

3°) Déterminer le sens de variations de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

4°) Montrer alors la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, et déterminer sa limite.

<u>Exercice 2</u> : <u>Approfondissements</u>

Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, définie par son 1er terme $u_0 > 0$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = \ln(1+u_n)$.

1°) Montrer, par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, que l'on a : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$.

2°) Etudier les variations, puis le signe de la <u>fonction</u> $\varphi : x \to \varphi(x) = x - \ln(1+x)$ sur $\mathbb{R}_+$.

3°) En déduire le sens de variations de la <u>suite</u> réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

4°) Montrer alors la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, et déterminer sa limite.

IV/ <u>ETUDE DE CONJECTURES</u> :

<u>Exercice 1</u> :

Dire si les propositions suivantes sont <u>vraies</u> ou <u>fausses</u>, et justifier sa réponse :

(1) Si une suite est monotone, alors elle converge nécessairement.
(2) Une suite positive et décroissante converge nécessairement.
(3) Toute suite bornée est convergente.
(4) Si une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $e^{-n} \leq u_n \leq 1/(n+1)$, alors elle converge.
(5) Toute suite croissante, qui tend vers 0, est majorée par 0.

<u>Exercice 2</u> : <u>Approfondissements.</u>

Dire si les propositions suivantes sont <u>vraies</u> ou <u>fausses</u>, et justifier sa réponse :

(1) Une suite qui n'est pas majorée tend nécessairement vers $+\infty$.
(2) Toute suite qui a pour limite $+\infty$ est croissante à partir d'un certain rang.
(3) Il existe des suites non monotones qui convergent.
(4) Si les suites $(u_n+v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_nv_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent.
(5) Si la suite $(n.u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge nécessairement.

<u>SECTION 5</u> : <u>INTEGRATION</u>.

<u>Thématique n°1</u> : <u>Calculs d'intégrales, de primitives, et de surfaces</u>.

<u>Exercice 1</u> :

Calculer les intégrales suivantes :

1) $\int_0^1 \frac{x}{x^2+1}dx$; 2) $\int_0^1 xe^{-x^2}dx$; 3) $\int_1^e \frac{\ln(x)}{x}dx$; 4) $\int_0^{\pi/2} \sin^2(x).\cos(x).dx$; 5) $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx$.

6) Déterminer la primitive de la fonction $f : t \to \sin(2t)$ valant 1 en $\pi/2$.

7) Calculer, en unités d'aires, l'aire de la surface délimitée par la courbe représentative de la fonction $g : t \to 4-t^2$, définie sur $[-2,2]$, et celle de la fonction $-g$, après avoir dessiné le domaine en question.

<u>Exercice 2</u> : <u>Approfondissements et compléments.</u>

Calculer les intégrales suivantes :

1) $\int_0^1 \frac{x^2}{x+1}dx$; 2) $\int_0^{\ln(2)} \frac{dx}{e^x+1}$; 3) $\int_0^1 \frac{x.\ln(x^2+1)}{x^2+1}dx$; 4) $\int_0^{\pi/2} \sin^3(x).\cos^2(x).dx$; 5) $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$.

6) Déterminer la primitive de la fonction $g : t \to \sin^4(t)$ valant 1 en 0.

7) Calculer, en unités d'aires, l'aire de la surface délimitée par la courbe représentative de la fonction $g : t \to |(t+1)(t-2)|$, l'axe horizontal, et les droites d'équation $x=-2$ et $x=2$, après avoir dessiné le domaine en question.

<u>Thématique n°2</u> : <u>Une nouvelle méthode d'intégration</u>.

<u>Exercice 1</u> :

1°) Chercher une primitive de la fonction $f : t \to t.e^{-t}$ sous la forme $F : t \to (at+b).e^{-t}$.

Calculer alors l'intégrale $I = \int_0^1 t.e^{-t}dt$.

2°) Chercher une primitive de la fonction $f : t \to \ln(t)$ sous la forme $F : t \to at\ln(t)+bt$.

Calculer alors la valeur moyenne de f sur $[1,e]$.

<u>Exercice 2</u> : <u>Approfondissements et compléments</u>.

Soient u et v deux fonctions dérivables sur $[a,b]$, de dérivées u' et v' continues sur $[a,b]$.

1°) Rappeler la formule de dérivation du produit uv.

2°) En déduire l'égalité : $(uv)_{(b)} - (uv)_{(a)} = \int_a^b u'(t)v(t)dt + \int_a^b u(t)v'(t)dt$.

On écrit cette formule sous la forme : $\int_a^b u'(t)v(t)dt = [(uv)_{(t)}]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t)dt$, où le terme $[(uv)_{(t)}]_a^b$ désigne $(uv)_{(b)} - (uv)_{(a)}$. On l'appelle <u>formule d'intégration par parties</u>.

3°) Utiliser cette formule pour calculer $I = \int_0^1 t.e^{-t}dt$ (on prendra $u'(t) = e^{-t}$, $v(t) = t$).

4°) Calculer de même la valeur moyenne de $t \to \ln(t)$ sur $[1,e]$ (poser $u'(t)=1, v(t)=\ln(t)$).

<u>Thématique n°3</u> : <u>Etude de suites d'intégrales</u>.

<u>Exercice 1</u> :

On pose : $I_n = \int_0^1 x^n dx$ et $J_n = \int_0^1 x^n e^{-x} dx$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1°) Calculer I_n, puis $\lim_{n\to+\infty} I_n$.

2°) Calculer J_0.

3°) Déterminer la dérivée de la fonction $f : x \to -xe^{-x} - e^{-x}$, puis calculer J_1.

4°) Montrer que la suite $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, puis que $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

5°) Montrer que $J_n \le I_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. En déduire la limite de la suite $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

<u>Exercice 2</u> : <u>Approfondissements et compléments</u>.

On pose : $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^n} dx$ et $J_n = \int_0^1 \ln(1+x^n) dx$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1°) Calculer I_0 et I_1.

2°) Montrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, puis que $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

3°) Montrer que $I_n \le \frac{1}{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. En déduire la limite de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

4°) Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, on a : $\ln(1 + x) \le x$. En déduire $\lim_{n\to+\infty} J_n$.

5°) Soit la fonction $f : x \to x.\ln(1+x^n)$. Calculer sa dérivée.

En déduire l'égalité : $\int_0^1 \ln(1+x^n).dx + n\int_0^1 \frac{x^n}{1+x^n} dx = \ln(2)$.

6°) Montrer enfin l'égalité : $\lim_{n\to+\infty} n.I_n = \ln(2)$.

<u>Thématique n°4</u> : <u>Etude de fonctions définies par une intégrale</u>.

<u>Exercice 1</u> :

On pose : $F(x) = \int_0^x e^{t^2} dt$, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$.

1°) Déterminer la dérivée de F, et le sens de variation de F sur $\mathbb{R}_+$.

2°) Calculer $F(0)$. En déduire le signe de F sur $\mathbb{R}_+$.

3°) Montrer pour tout $t \ge 1$, que $e^{t^2} \ge e^t$. En déduire pour tout $x \ge 1$: $F(x) - F(1) \ge e^x - e$.

4°) En déduire la valeur de $\lim_{x\to+\infty} F(x)$ et de $\lim_{x\to+\infty} \frac{F(x)}{x}$. Interpréter graphiquement.

5°) Calculer enfin $F'(0)$, puis tracer le graphe de la fonction F.

<u>Exercice 2</u> : <u>Approfondissements.</u>

On pose : $F(x) = \int_x^{2x} e^{-t^2} dt$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.

1°) Montrer que la fonction F est impaire. Que vaut $F(0)$?

2°) Déterminer la dérivée de F, et le sens de variation de F sur $\mathbb{R}_+$.

4°) Montrer pour tout $t \ge 1$, que $e^{-t^2} \le e^{-t}$. En déduire pour tout $x \ge 1$: $0 \le F(x) \le e^{-x} - e^{-2x}$.

5°) En déduire la valeur de $\lim_{x\to+\infty} F(x)$. Interpréter graphiquement.

6°) Calculer enfin $F'(0)$, puis tracer le graphe de la fonction F.

SECTION 6 : GEOMETRIE.

Thématique n°1 : Nombres complexes et géométrie.

Exercice 1 :
Soient A,B,C,D quatre points d'affixes respectifs, dans le plan complexe :

$z_A = \sqrt{2}.e^{i\pi/4}$, $z_B = 4+2i$, $z_C = -5-i$, et $z_D = -\overline{z}_C$.

1°) Représenter ces quatre points dans le plan muni d'un repère orthonormé, et représenter les divers triangles possibles ayant pour sommets trois de ces points.

2°) Démontrer que les points A,B,C sont alignés.

3°) Calculer le quotient $\dfrac{z_A - z_B}{z_D - z_B}$ sous forme algébrique et trigonométrique.
Que peut-on en déduire pour le triangle (ABD) ?

4°) Confirmer ce résultat par le calcul des distances AB, AD, BD.

Exercice 2 : Approfondissements et compléments.
On pose : $Z = \dfrac{z-i}{z-1}$ pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$.
Déterminer l'ensemble des points M, d'affixe z, dans le plan complexe, tels que :
a) $Z \in \mathbb{R}$; b) $\arg(Z) = \pm\dfrac{\pi}{2}$; c) $|Z| = 1$; d) $|Z| = 2$.

Thématique n°2 : Equations de droites dans le plan.

Exercice 1 :
On considère le plan *(P)* muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1°) Déterminer l'équation de la droite (Δ) passant par $A(1,0)$, et de vecteur directeur $\vec{u}(-2,1)$.

2°) Déterminer l'équation de la parallèle (Δ') à (Δ) passant par $B(0,1)$.

3°) Déterminer l'équation de la perpendiculaire (D_1) à (Δ) passant par $C(-1,0)$.

4°) Déterminer l'équation de la droite (D_2) passant par $D(0,-1)$ et $E(1,1)$.

5°) Montrer alors que (D_1) et (D_2) sont parallèles.

6°) Déterminer la nature du quadrilatère $(ABCD)$. Justifier votre réponse.

Exercice 2 : Approfondissements et compléments

On considère le plan *(P)* muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$. Soit m un paramètre réel.
Soient les droites (D_1) et (D_2) d'équations respectives : $\underline{x+(m-1)y=1}$ et $\underline{mx+2y=2}$.

1°) Déterminer pour quelle(s) valeur(s) de m on a :
   a) Les droites (D_1) et (D_2) sont parallèles ? Préciser leur équation dans chaque cas.
   b) Les droites (D_1) et (D_2) sont perpendiculaires ? Préciser leur équation.

3°) On appelle « *distance d'un point A à une droite* (Δ) », notée $d(A,\Delta)$, la plus petite distance existant entre ce point *A* et un point *M* de cette droite (Δ). Faire un dessin.
   a) Montrer que $d(A,\Delta) = AH$ où *H* est le projeté orthogonal de *A* sur (Δ).
   b) Pour quelle(s) valeur(s) de m le point O est-il équidistant de (D_1) et de (D_2) ?
   Préciser cette distance commune, et les projetés orthogonaux H, H' de O sur $(D_1),(D_2)$.

<u>Thématique n°3</u> : <u>Droites et plans de l'espace. Utilisation du produit scalaire.</u>

<u>Exercice 1</u> :

1°) Déterminer l'équation cartésienne du plan (P) de l'espace, muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, passant par le point $A(1,0,2)$ et de vecteur normal $\vec{n}(1,-2,1)$.
2°) Soit (P') le plan d'équation cartésienne : $3x+y-z=4$.
Définir le plan (P') par un de ses points et un de ses vecteurs normaux.
3°) En déduire que les plans (P) et (P') sont sécants. Sont-ils perpendiculaires ?
4°) Donner une *représentation paramétrique* de la droite (D), intersection de (P) et (P').

<u>Exercice 2</u> : <u>Approfondissements et compléments</u>.

On considère la droite (D), définie par la *représentation paramétrique* suivante :

$$\begin{cases} x = 4+5t \\ y = -2+t \\ z = 2+3t \end{cases} ;\ t \in \mathbb{R}$$, dans l'espace, muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

1°) Donner l'équation cartésienne du plan (P) passant par $A(1,2,-3)$, perpendiculaire à (D).
2°) Justifier le fait que les points $B(-3,2,1)$, $C(-1,1,0)$, $D(-4,4,3)$ définissent un plan (P').
3°) Déterminer l'équation cartésienne du plan (P'). Montrer que (P) et (P') sont sécants.
4°) Donner une représentation paramétrique de la droite (D') d'intersection de (P) et (P').
5°) Montrer que (D) et (P') sont sécants. Déterminer leur point d'intersection *I*.

<u>Thématique n°4</u> : <u>Intersections de figures géométriques</u>.

<u>Exercice 1</u> : <u>Intersection d'une droite et d'une sphère</u>.

1°) L'espace (E) étant muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on considère $A(1,5,3)$ et on pose $M(x,y,z)$. Donner l'équation cartésienne de la sphère (S) de centre *A*, de rayon 3.
2°) Déterminer une représentation paramétrique de la droite (D) passant par $B(-2,1,1)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(5,2,1)$.
3°) Montrer que le point de paramètre t appartient à (S) si et seulement si $3t^2-5t+2=0$.
4°) En déduire que la droite (D) coupe la sphère (S) en deux points M_1, M_2 qu'on précisera.
Vérifier que le résultat est correct en calculant AM_1 et AM_2.

<u>Exercice 2</u> : <u>Cône et cylindre inscrit. Optimisation.</u>

Soit *(C)* un cône de hauteur H = 4cm, de base circulaire de rayon R = 2cm, et *(C')* un cylindre de hauteur *h*, et de rayon *r*, inscrit dans ce cône.
L'espace étant muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, le cercle de base du cône et celui du cylindre sont centrés en *O*, situés dans le plan horizontal (*Oxy*).
1°) Déterminer l'équation du cône *(C)* [<u>Indication</u> : On observera que *(C)* est l'empilement de cercles horizontaux de rayon ρ, avec $0 \le \rho \le R$ et $H-z=2\rho$]
2°) Démontrer la relation : $H-h=2r$, existant entre *h* et *r* pour *(C')*.
3°) Déterminer alors le volume de *(C')*, en fonction de *h* uniquement (noté $V(h)$).
4°) Pour quelle valeur de *h* le volume de *(C')* est-il maximal ? Quel est alors ce volume ?
[<u>Indication</u> : On étudiera la fonction $V(h)$ sur l'intervalle $[0,H]$.]