Université Paris-Est Marne-la-Vallée **Université Paris-Est Créteil**

École des Ponts ParisTech

Master MATHÉMATIQUES ET APPLICATIONS

Année universitaire 2014-2015

Le master recherche "Mathématiques et applications" est une des deux spécialités du master de mathématiques de l'université de Marne-la-Vallée. Il est organisé par trois établissements cohabilités : l'Université Paris-Est Marne-la-Vallée, l'École des Ponts ParisTech, l'Université Paris-Est Créteil Val-de-Marne. Cette brochure décrit la seconde année (correspondant au niveau DEA).

Responsable du Master : Marco Cannone (marco.cannone@univ-mlv.fr)

Correspondant à Marne-la-Vallée : Romuald Elie (romuald.elie@univ-mlv.fr)
Correspondant à Créteil Val-de-Marne : Hajer Bahouri (hajer.bahouri@u-pec.fr)
Correspondant à l'Ecole des Ponts : Aurélien Alfonsi (alfonsi@cermics.enpc.fr)

Secrétariat : Marie-Monique Ribon (Marie-Monique.Ribon@univ-mlv.fr)
Tél. 01 60 95 75 32, Fax. 01 60 95 75 49
Université Paris-Est Marne-la-Vallée
Laboratoire d'analyse et de mathématiques appliquées
5 Boulevard Descartes
Cité Descartes, Champs-sur-Marne
77 454 Marne-la-Vallée CEDEX 2

Web : http://ufr-math.univ-mlv.fr/formations/master/

Présentation de la deuxième année de master

La deuxième année du master "Mathématiques et Applications" propose aux étudiants une double formation en analyse et en probabilités et des possibilités de spécialisation dans divers domaines proches des applications industrielles. Les étudiants peuvent choisir l'un des trois parcours suivants, les numéros d'unités d'enseignement (UE) renvoyant à la liste de la page 4 :

Parcours finance Ce parcours (en partenariat avec le site Math-fi.com) est axé sur les techniques de quantification et de couverture des risques sur les marchés financiers. On y présente dans un premier temps les outils mathématiques permettant la modélisation des titres financiers (calcul stochastique, séries temporelles). Leur utilisation pour la valorisation et la gestion des risques est détaillée dans un second temps et complétée par le transfert d'expérience de professionnels de salles de marché. Un accent tout particulier est porté sur l'étude des méthodes numériques (probabilistes et analytiques) permettant l'évaluation et la couverture des outils financiers correspondants. Les spécificités de ces méthodes pour leur application au secteur des assurances ou de l'énergie sont détaillées. On insistera en particulier sur la modélisation du risque de crédit et les caractéristiques du trading haute fréquence. Ce parcours s'appuie sur la formation d'ingénieurs de l'Ecole des Ponts. Ses effectifs sont limités à une vingtaine d'étudiants (hors élèves de l'Ecole des Ponts).

Le projet Mathrisk, équipe de recherche commune à l'Université Paris-Est Marne-la-Vallée, l'Ecole des Ponts ParisTech et l'INRIA (Institut National de Recherche en Informatique et Automatique), assure l'encadrement scientifique de ce parcours. Cette équipe développe en particulier un logiciel de valorisation des risques financiers en partenariat avec le milieu professionnel.

Parcours probabilités appliquées et statistiques Ce parcours s'appuie sur l'équipe de recherche en probabilité et statistique du Laboratoire d'Analyse et de Mathématiques Appliquées, laboratoire commun aux Universités Paris-Est Marne-la-Vallée et Paris-Est Créteil. Il présente l'avancée actuelle des méthodes probabilistes et statistiques en lien avec le traitement de l'information. En particulier, il présente les méthodes de simulations numérique et d'estimation statistique liées à l'observation de données comportementales. Avec l'essor de la récolte massive de données (e-marketing, profilage client, scoring,...), le champs d'application des méthodes présentées dans ce parcours est très vaste. Le parcours insiste en particulier sur les problématiques récentes de sélections e modèles (sparsité, échantillonnage partiel, machine learning...) en lien avec l'explosion des volumes de donnée récoltés ces dernières années.

Parcours analyse et applications (image, compressed sensing) Destiné aux étudiants intéressés par l'analyse, ce parcours est centré sur des thématiques développées dans les équipes de recherche des Universités Paris-Est Marne-la-Vallée et Paris-Est Créteil. Ce parcours permet de s'initier aux techniques les plus récentes de l'analyse dont certaines ont de remarquables applications dans les domaines de l'analyse d'images et du traitement de signaux. Le cours *courbure discrète* présente des applications en informatique (CAO, dessin en 3D) et en architecture. Les étudiants intéressés par cette thématique pourront suivre, au premier semestre, le cours *Géométrie discrète* du master 2 informatique SIS (Signal, Image Synthèse).

Parcours Bézout Les étudiants selectionnés pour le parcours Bézout `http://bezout.univ-mlv.fr` suivent l'un des parcours précédents, completé par des enseignements du Master d'informatique de l'UPEMLV.

Les parcours ci-dessus sont donnés à titre indicatif et d'autres choix sont possibles. En particulier, la variété des cours permet à de futurs **candidats à l'agrégation** de consolider leur culture mathématique tout en s'ouvrant à la modélisation.

Conditions d'admission et modalités d'inscription

La deuxième année du master "Mathématiques et Applications" s'adresse aux étudiants ayant validé une première année de master en mathématiques pures ou appliquées ou justifiant d'un niveau équivalent, ainsi qu'aux élèves des Grandes Écoles. Les étudiants sont admis sur dossier. Ils doivent préciser le ou les parcours qu'ils envisagent de suivre, sachant que les effectifs du parcours finance sont limités à une vingtaine d'étudiants (hors élèves de l'Ecole des Ponts). Dans le cas où les informations contenues dans le dossier ne permettraient pas de conclure, les candidats pourront être convoqués pour un entretien.

Les candidatures se font en ligne, sur le site https://candidatures.univ-pem.fr/ . En cas de difficulté pour candidater par ce moyen, prendre contact avec le secrétariat (`Marie-Monique.Ribon@univ-mlv.fr`, tél 01 60 95 75 32).

Les candidats admis s'inscrivent administrativement dans l'un des trois établissements cohabilités (Universités Paris-Est Marne-la-Vallée, Paris-Est Créteil et Ecole des Ponts).

Organisation pédagogique

Le master est organisé en deux semestres. Les cours commencent le **lundi 15 septembre 2014**.

Les cours du premier semestre sont principalement des cours fondamentaux, ouvrant la voie aux cours plus spécialisés proposés au second semestre. Des séances de perfectionnement en informatique (C++) sont également prévues. Le deuxième semestre est consacré d'une part aux cours plus spécialisés (de janvier à mars) et, d'autre part, à un stage ou mémoire d'initiation à la recherche. La liste de cours donnée dans cette brochure a un caractère indicatif et pourra être modifiée dans le courant du premier semestre, en fonction des effectifs et des vœux des étudiants.

Chaque parcours est composé d'un socle d'enseignements obligatoire comptant pour 18 ECTS. Ce socle doit être complété par 4 autres cours à 6 ECTS chacun, dont au moins 3 dans le parcours correspondant. Le stage ou mémoire de fin d'étude comptabilise 18 ECTS.

Les étudiants peuvent, dans la limite d'un cours de 6 ECTS, et sous réserve de l'accord du responsable du master, suivre un cours dans d'autres masters recherche de l'Université Paris-Est Marne-la-Vallée ou même dans des masters recherche extérieurs.

Le stage d'initiation à la recherche commence au mois d'avril. Ce stage (ou mémoire) peut avoir lieu dans une équipe de recherche universitaire ou dans un laboratoire de recherche appliquée d'un organisme public ou d'une entreprise. Le stage donne lieu à une soutenance et compte pour 18 ECTS.

Contrôle des connaissances et obtention du diplôme

Chaque cours est sanctionné par un examen final. Pour certains cours, un projet informatique peut être demandé aux élèves, la note de projet comptant au maximum pour moitié dans la note finale.

Dans chaque parcours, pour obtenir le diplôme, un étudiant doit avoir une moyenne au moins égale à 10 dans les cours fondamentaux de son parcours, une note de stage également supérieure ou égale à 10, ainsi qu'une moyenne générale supérieure à 10.

La filière Bézout est bi-disciplinaire : chaque étudiant sélectionné doit ainsi suivre l'intégralité des enseignements de l'un des deux masters (mathématiques ou informatique) et doit valider deux modules de l'autre master. Le cursus choisi par l'étudiant sera établi en accord avec les responsables des deux masters.

Débouchés

Certains cours étant nettement orientés vers les applications, en particulier ceux des parcours **finance** et **probabilités appliquées et statistiques**, les étudiants peuvent trouver, à l'issue du master, des débouchés en entreprise. Les secteurs d'applications concernés sont la finance de marché (analyse quantitative, structuration etc.), le traitement statistique de données (marketing web, assurances, etc.), les problèmes d'évolution issus de la physique. Dans ces secteurs, les besoins sont importants au sein des organismes de recherche, des grandes entreprises industrielles, des assurances et des banques.

Certains étudiants, en particulier ceux qui se destinent à la carrière de chercheur ou d'enseignant-chercheur, peuvent s'orienter vers la préparation d'une thèse. La thèse peut être préparée dans une des équipes de recherche associées au master (le Laboratoire d'Analyse et de Mathématiques Appliquées (UMR 8050 CNRS) des Universités Paris-Est Marne-la-Vallée et de Paris-Est Créteil et le CERMICS, Centre d'Enseignement et de Recherche en Mathématiques, Informatique et Calcul Scientifique de l'École des Ponts).

Pour les diplômés admis à préparer une thèse, divers financements peuvent être envisagés (allocations de recherche du Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche, bourses C.I.F.R.E., bourses de l'École des Ponts, ...). Les allocations de recherche du Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche sont attribuées par l'intermédiaire des écoles doctorales. Le master a des relations privilégiées avec l'école doctorale *Mathématiques et STIC* du Pôle de Recherche et d'Enseignement Supérieur *Université Paris-Est* et avec l'école doctorale *Sciences et Ingénierie* de l'Université d'Évry.

Liste des UE (contenu détaillé dans les pages suivantes)

UE du parcours finance

Fin1 Tronc commun finance (18 ECTS)

- **F0** Semaine d'ouverture Finance Quantitative
- **F0** Introduction au C++
- **F1** Calcul stochastique
- **F2** Arbitrage, volatilité et gestion de portefeuille
- **F3** Méthodes de Monte-Carlo en finance

Fin2 Mathématiques financières approfondies (24 ECTS)

Il faut valider 4 cours à 6 ECTS (hors P4 et P6) dont au moins 3 parmi:

- **F4** Modèles de taux d'intérêt
- **F5** Microstructure des marchés financiers
- **F6** Risque de contrepartie, risque de crédit
- **F7** Mesures de risque en finance
- **F8** Processus avec sauts et applications au marché de l'énergie
- **F9** Méthodes numériques et produits structurés en actuariat
- **F10** Apprentissage statistique et applications en finance

F11 Introduction au Calcul de Malliavin et applications numériques en finance

P1 Prévision statistique

UE du parcours Probabilités appliquées et Statistiques

PS1 Tronc commun Probabilités et Statistiques (18 ECTS)

- **P1** Prévision statistique
- **P2** Statistique non paramétrique
- **F1** Calcul stochastique

PS2 Enseignements approfondies (24 ECTS)

Il faut valider 4 cours à 6 ECTS dont au moins 3 parmi:

- **P3** Sélection de modèles
- **P4** Simulation et copules
- **P5** Processus stochastiques
- **P6** Matrices aléatoires et applications
- **P7** Convergence vers l'équilibre des diffusions réversibles
- **P8** Cloud computing
- **F10** Apprentissage statistique et applications en finance
- **F11** Introduction au Calcul de Malliavin et applications numériques en finance
- **A4** Analyse multifractale et traitement du signal et de l'image
- **A6** Transport optimal, théorie et applications

UE du parcours Analyse et applications

AA1 Tronc commun Analyse (18 ECTS)

- **A1** Outils d'analyse et équations aux dérivées partielles
- **A2** Théorie des profils et analyse d'équations d'évolution non linéaires

AA2 Cours d'analyse approfondie et applications (24 ECTS)

Il faut valider 4 cours à 6 ECTS dont au moins 2 parmi:

- **A3** Équations paraboliques dégénérées et équations de Hamilton-Jacobi
- **A4** Analyse multifractale et traitement du signal et de l'image
- **A5** Modèles mathématiques aux équations différentielles ordinaires et partielles en sciences du vivant
- **A6** Transport optimal, théorie et applications
- **A7** Méthodes d'analyse de Fourier pour l'étude de fluides non homogènes
- **A8** Courbure discrète et synthèse d'image 3D

F1 Calcul Stochastique

Premier Semestre
Enseignant : Damien Lamberton, Rémi Rhodes.

Le but de ce cours est de présenter les processus stochastiques à temps continu usuels et leurs principales propriétés. Ces processus permettent de modéliser par exemple le cours des titres financiers. Le lien avec les méthodes de Monte Carlo, les applications en finance et les équations aux dérivées partielles seront également discutées.

- Mouvement brownien : construction, régularité et propriétés des trajectoires.
- Martingales à temps continu, temps d'arrêt et théorème d'arrêt.
- Variation quadratique, intégrale stochastique et formule d'Itô.
- Équations différentielles stochastiques à coefficients lipschitziens. Liens avec les équations aux dérivées partielles: formule de Feynman-Kac.

Bibliographie :

- N. Bouleau, *Processus Stochastiques et Applications*, Hermann (1988).
- F. Comets, M. Meyre, *Calcul stochastique et modèles de diffusions*, Dunod (2006).
- J. Hull, *Options, futures and other derivatives*, Prentice Hall (2006).
- I. Karatzas, S. Shreve, *Brownian motion and Stochastic Calculus*, Springer-Verlag (1987).
- D. Lamberton, B. Lapeyre, *Introduction au Calcul Stochastique Appliqué à la Finance*, 2nde édition, Ellipses (1997).
- R. Portait, P. Poncet *Finance de marché*, 2nde édition, Dalloz (2009). Springer (1997).
- D. Revuz, M. Yor, *Continuous martingales and Brownian motion*, Springer-Verlag (1991).

Connaissances préalables requises : Théorie de la mesure et calcul des probabilités (voir, par exemple le livre *L'essentiel en théorie des probabilités* de J. Jacod et P. Protter, Vuibert, 2003).

F2 Arbitrage, Volatilité et gestion de portefeuille

Premier Semestre
Enseignant : Romuald Elie

Le but de ce cours est de présenter les principales méthodes quantitatives de valorisation de produits dérivé et de choix d'investissement optimal en univers incertain, modélisé par des processus en temps continu. Les problématiques de calibration des modèles et les méthodes numériques de valorisation seront également présentées. Les hypothèses sous-jacentes aux méthodes de valorisation et aux choix de modélisation seront mises en avant et leur réalisme sera discuté.

- Théorie de l'arbitrage: comparaison de portefeuilles et parité Call Put
- Etude du modèle binomial, valorisation risque neutre et couverture d'options
- Etude du modèle de Black Scholes: valorisation par méthodes de Monte Carlo et par EDP. Construction du portefeuille de couverture
- Méthodes d'estimation et de calibration de la volatilité. Smile de volatilité. Modèles à volatilité locale et stochastique.
- Introduction au contrôle stochastique: consistance dynamique et équation d'Hamilton Jacobi Bellman.
- Théorie de l'utilité espérée et applications aux choix d'investissement en univers incertain
- Problèmes d'arrêt: approximation du maximum d'un portefeuille et valorisation d'options américaines.
- Ajout de frictions sur les marchés: cas particulier de l'ajout de coûts de transaction ou de contraintes de portefeuille

Bibliographie :

- D. Lamberton, B. Lapeyre, *Introduction au Calcul Stochastique Appliqué à la Finance*, 2nde édition, Ellipses (1997).
- N. El Karoui, E. Gobet, *Les outils stochastiques des marchés financiers : une visite guidée de Einstein à Black-Scholes*, (2011).
- S. Shreve, *Stochastic Calculus for Finance Volume II: Continuous-Time Models*, (2004).
- B. Bouchard, J.-F. Chassagneux, *Valorisation de produits dérivés - Des théorèmes fondamentaux à la couverture sous contrainte de risque*, Economica (2013).

F3 Méthodes de Monte-Carlo en Finance

Premier Semestre
Enseignants : Bernard Lapeyre, Benjamin Jourdain, Eric Benhamou.

Partie I : Méthodes de Monte-Carlo pour le calcul d'intégrales dans $\mathbb{R}^n$

1. Méthode de Monte-Carlo, introduction aux méthodes de réduction de variance.
2. Méthodes de réduction de variance : variables de contrôle, fonction d'importance, techniques de stratification, conditionnement, ...
3. Suites à discrépances faibles, éléments théoriques, exemples classiques (Halton, Faure, Sobol, Niederreiter, ...).
4. Utilisation de suites à discrépance faible et de techniques de quantification en finance.
5. Introduction au Monte Carlo Américain. Description de l'algorithme de Longstaff-Schwartz et de quantification.

Partie II : Méthodes de Monte-Carlo pour les processus financiers

Dans cette partie nous nous intéresserons au calcul des prix d'options qui s'écrivent comme l'espérance d'une fonction du processus de diffusion modélisant l'actif sous-jacent. L'erreur Monte Carlo se décompose en un terme de biais qui correspond à la discrétisation en temps de la diffusion plus un terme d'erreur statistique. Nous étudierons le biais avant de passer en revue les méthodes de réduction de variance qui permettent de réduire l'erreur statistique, puis d'aborder la discrétisation des modèles qui comportent des sauts :

1. Discrétisation de diffusions : schémas classiques (Euler, Milshtein, ...), vitesses de convergence. Techniques d'extrapolation. Schémas d'ordre supérieur forts et faibles.
2. Techniques de discrétisation adaptées aux options exotiques (cas des options barrières et look-back, des options asiatiques, ...).
3. Réduction de variance pour les calculs d'options dans les modèles de diffusion.
4. Simulation de modèles avec sauts.

Partie III: Les méthodes de Monte Carlo vues par un professionnel de la modélisation

1. Pricing d'un produit path dependent complexe sur taux d'intérêt. Description des flux financiers, risque à prendre en compte dans la modélisation, premier Monte Carlo pour le calcul de l'ajustement de convexité.
2. Calcul de la condition TARN du produit. Comparaison Monte Carlo Quasi Monte Carlo. Estimation des strikes implicites. Discussion sur la calibration.

Bibliographie :

- Paul Glasserman. *Monte Carlo methods in financial engineering*, volume 53 of *Applications of Mathematics (New York)*. Springer-Verlag, New York, 2004.
- Bernard Lapeyre, Etienne Pardoux, et Rémi Sentis. *Méthodes de Monte-Carlo pour les équations de transport et de diffusion*, volume 29 de *Mathématiques & Applications (Berlin)*. Springer-Verlag, Berlin, 1998.

F4 Modèles de taux d'intérêt

Deuxième Semestre
Enseignant : Vlad Bally, Aurélien Alfonsi, Christophe Michel.

Le but du cours est de présenter aux étudiants une introduction aux modèles usuels employés dans la théorie des taux d'intérêt. Trois classes de modèles se sont imposées. Le point de vue le plus ancien explique le comportement des taux d'intérêt par le taux court (instantané). Une multitude de modèles pour la dynamique du taux court ont été proposés, une des motivations principales étant leurs aptitudes diverses pour la calibration. Mais les modèles de taux court ont le désavantage de ne pas pouvoir expliquer l'évolution des zéro coupons en toute généralité. Une nouvelle génération de modèles est apparue : tout d'abord, le modèle de Heath-Jarrow-Merton (HJM), basé sur les *taux forward*, qui réalise une modélisation en toute généralité et a en plus des vertus du point de vue de la calibration. Puis, les "market models" - celui de Brace-Gatarek-Musiela (BGM), mais aussi celui de Jamishdian - qui focalisent leurs intérêt sur un certain type de produits financiers et établit une modélisation dans laquelle le calcul du prix de ce type de produit se fait par formules explicites.

Plan du cours
Partie 1. Modèles de taux court.
a. Présentation générale: zéro coupons, taux courts, taux forward instantanés.
b. L'équation de structure. Approche EDP et approche martingale.
c. Modèles courants de taux courts: Vasicek, Ho et Lee, Hull et White, Cox-Ingersol-Ross.
d. Modèles multi-facteurs.
e. Modèles à structure affine.
Partie 2. Modèle de Heath-Jarrow-Merton (HJM).
a. Modélisation martingale et condition de dérive de HJM.
b. Changement de numéraire et probabilités forward.
c. Formule de Black.
d. Evaluation du prix des produits courants: Caps, floors, swaps et swaptions. Taux swap.
Partie 3. Modèles de marché. Le modèle de Brace-Gatarek-Musiela (BGM).

Bibliographie :

- Björk T. (1998), *Arbitrage Theory in Continuous Time*, Oxford University Press.
- Björk T.(1997), *Interest Rate Theory*, in Runggaldier (ed.) *Financial Mathematics,* Springer Lecture Notes in Mathematics **1656**. Springer Verlag, Berlin.
- Brigo D. et Mercurio F., *Interest rate models, theory and practice*, Springer Finance, 1998.
- Lamberton D., Lapeyre B. (1997), *Introduction au Calcul Stochastique Appliqué à la Finance*, 2nde édition, Ellipses.

F5 Microstructure des marchés financiers

Deuxième Semestre
Enseignants : Aurélien Alfonsi, Arnaud Gloter.

Ce cours s'intéresse dans un premier temps aux problématiques statistiques d'estimation de la volatilité en présence de bruit de Microstructure sur les marché financiers. Ce bruit est du à une observation trop fréquente du cours des titres. Nous étudierons les méthodes statistiques classiques d'estimation des paramètres de volatilité, et verrons comment adapter les méthodes classiques à la présence de ce bruit.

Dans un second temps, le cours présentera les stratégies de liquidation de volume important de titres sur les marchés financiers, ce qui nécessite la considération de modèles spécifiques dans lequel une transaction a un impact sur le cour des titres. En effet, Lorsque l'on place un ordre de taille significative sur le marché, il faut prendre en compte son impact sur le prix de cotation. En particulier, le coût de son exécution n'est plus simplement proportionnel à son volume. Pour limiter son impact et son coût, il est généralement préférable de découper cet ordre en plusieurs ordres de taille plus petite. Pour comprendre et quantifier cela, nous présenterons des modèles de "price impact" dans lesquels nous chercherons à identifier des stratégies dexécutions optimales. Nous commencerons pas le modèle linéaire de Bertsimas et Lo et d'Almgren et Chriss avant de considérer des modèles plus sophistiqués. L'étude de ces modèle nous amènera naturellement à discuter des conditions de non arbitrage sur des échelles de temps courtes, ainsi que des stratégies utilisées par les "market makers".

F6 Risque de contrepartie, risque de crédit

Deuxième Semestre
Enseignant : Stéphane Crépey.

La sphère du risque de crédit a évolué très rapidement ces dernières années. Avant la crise le sujet principal était celui de la modélisation des produits dérivés de crédit. La crise a mis l'accent sur la forme native du risque de crédit, à savoir le risque de contrepartie. Ce risque, qui est présent dans toute transaction OTC entre deux parties, est le risque de non-paiment des flux promis aux termes du contrat, suite au défaut d'une des parties.

Une évolution encore plus récente est l'émergence d'un risque de contrepartie systémique, référant à diverses bases significatives apparues depuis la crise entre des quantités très voisines auparavant, comme l'OIS et le Libor, ou les taux LIBOR de différentes fréquences. Via à son impact sur la notion d'actualisation, cette composante systémique du risque de contrepartie a des répercussions sur tous les marchés de produits dérivés.

Dans une première partie du cours on présentera les outils mathématiques utiles pour modèliser les événements liés au défaut: processus à sauts, grossissement de filtration. La deuxième partie sera consacrée au risque de contrepartie dans ces divers aspects: risque de contrepartie sur produits dérivés hors crédit, risque de contrepartie sur produits dérivés de crédit, risque de contrepartie systémique, interactions entre risque de contrepartie et funding.

Bibliographie :

- Bielecki, T., Brigo, D., Crépey, S (2013) *Counterparty Risk Modeling – Collateralization, Funding and Hedging.* Taylor & Francis (in preparation).
- Brigo D., Morini M. and Pallavicini, A. (2013):

  Counterparty Credit Risk, Collateral and Funding with Pricing Cases for all Asset Classes, Wiley.
- Bielecki, T.R., Jeanblanc, M. and Rutkowski, M. (2009):

  Credit Risk Modeling,

  Osaka University Press, Osaka University CSFI Lecture Notes Series 2.

F7 Mesures de risque en finance

Premier Semestre
Enseignants : Aurélien Alfonsi, Gilles Pages

La maîtrise des risques est au cœur des préoccupations du monde bancaire comme en témoigne les recommandations du Comité de Bâle sur le contrôle bancaire (Convergence nationale de la mesure et des normes de fonds propres). La mise en œuvre des recommandations se traduit également par des recrutements dans les services de contrôle des risques des banques. Le but de ce cours est de présenter dans une partie théorique les outils de mesure des risques concernant la salle de marché et la gestion du portefeuille d'actifs. Les principaux thèmes théoriques seront : les mesures de risques monétaires et la représentation des mesures de risque convexes, la théorie des valeurs extrêmes et la représentation multidimensionnelle des risques via les copules. Dans une deuxième partie pratique, des intervenants de la Société Générale présenteront les méthodes utilisées par les différents départements pour évaluer le risque financier.

Le programme détaillé peut être consulté sur le site

`http://cermics.enpc.fr/∼alfonsi/mrf.html`.

Le cours est financé par la "Chaire Risques Financiers" de la Société Générale, l'Ecole Polytechnique et l'Ecole des Ponts. Il est commun avec le Master Probabilités et Applications de Paris 6.

Bibliographie :

- Basel Committee on Banking supervision. *International convergence of capital measurement and capital standards.*
- Föllmer H. and A. Schied (2004) *Stochastic finance. An introduction in discrete time.* De Gruyter Studies in Mathematics **27**, 2004.
- McNeil A.J., R. Frey and P. Embrechts *Quantitative risk management. Concepts, techniques and tools.* Princeton Series in Finance, 2005.
- Roncalli T. *La gestion des risques financiers.* Economica. 2004.

F8 Processus avec sauts et applications au marché de l'énergie

Deuxième Semestre
Enseignants : Jean-François Delmas, Benjamin Jourdain, Marie Bernhart.

L'objectif de ce cours est d'introduire les processus de Lévy et le calcul stochastique avec sauts en vue d'applications au marché de l'énergie. Les processus de Lévy sont des processus à accroissements indépendants et stationnaires qui généralisent le mouvement Brownien en relâchant la propriété de continuité des trajectoires satisfaite par ce processus. Après avoir montré, au travers de la formule de Lévy-Kyntchine, que la loi d'un processus de Lévy ne dépend que d'un triplet de caractéristiques, nous donnerons une représentation des processus de Lévy à partir d'un mouvement Brownien et d'une mesure ponctuelle de Poisson. Nous construirons ensuite les intégrales stochastiques par rapport à la mesure de Poisson et à la mesure de Poisson compensée et démontrerons les formules d'Itô qui permettent de manipuler ces intégrales. Nous introduirons aussi quelques éléments de calcul stochastique pour les semimartingales générales. Nous présenterons ensuite les applications des processus à sauts en mathématiques financières et plus particulièrement pour le marché de commodités énergétiques: fonctionnement du marché, produits dérivés, modèles de prix à l'aide des processus de Lévy, méthodes numériques et application à la valorisation d'actifs de stockage gaz.

Une partie des séances est assurée par des intervenants d'EDF. Le cours est financé par la "Chaire Risques Financiers" de la Fondation du Risque.

Ce cours a lieu à l'Ecole des Ponts.

Des notes de cours en français sont disponibles sous forme électronique (PDF) à l'adresse `http://cermics.enpc.fr/~delmas/Enseig/levy.html`

F9 Méthodes numériques et produits structurés en actuariat

Deuxième Semestre
Enseignants : Ludovic Goudenège, Jacques Printems

Ce cours présente un panorama des techniques de structuration de produits financiers en lien avec les problématiques actuarielles du monde de l'assurance (Variable Annuities...). Ces produits spécifiques nécessitent des méthodologies de valorisation qui leur sont propres et seront présentées en détail. En particulier, nous étudierons les techniques reposant sur les méthodes numériques afférentes de résolution numérique d'équations aux dérivées partielles. Le cours sera agrémenté d'exemples pratiques illustrant l'utilisation de ces techniques.

De plus, les compagnies d'assurance sont soumises à des contraintes de solvabilité propres imposées à l'échelle Européenne. Pour cette raison, les calculs de fond propre nécessaires pour faire face à d'éventuelles dépréciations des encours d'une société soulèvent des problématiques de génération de scenarii économiques, calcul de quantiles et utilisation de méthodes de Monte Carlo avancées (nested Monte Carlo) qui seront présentées dans ce cours.

F10 Apprentissage statistique et applications en finance

Deuxième Semestre
Enseignant : Jérémie Jakubowicz et Jean-Yves Audibert

Le but du cours est de présenter les principales méthodes théoriques de l'apprentissage statistique ainsi qu'un large spectre de leurs applications, en particulier pour l'élaboration de méthodes d'investissement optimal et de gestion d'actif sur les marchés financiers.

F11 Introduction au Calcul de Malliavin et applications numériques en finance

Deuxième Semestre
Enseignant : Vlad Bally

Le but du cours est de donner une introduction élémentaire au Calcul de Malliavin et à ses applications, avec un intérêt particulier pour les applications numériques en finance. Les étudiants sont sensés avoir suivi un cours de calcul stochastique de base. Les points principaux du cours seront les suivants.

- **Présentation Générale.** Formule d'intégration par parties générale et applications. Les opérateurs différentiels et la formule de dualité : cas fini-dimensionnel et passage à la limite. Formule de représentation de Clark-Ocone et calcul de la couverture. Applications aux diffusions.
- **Calculs de sensibilités.** Les *grecques.*
- **Options américaines.** Calcul de l'espérance conditionnelle. Programation dynamique et méthode de Monte Carlo. Localisation (réduction de variance).
- **Espaces de Sobolev sur l'espace de Wiener.**
- **Décomposition en chaos.**

Bibliographie :

- D Nualart (1995), *The Malliavin calculus and related topics.* Springer Verlag.
- N. Ikeda and S. Watanabe (1989), *Stochastic Differential Equations and Diffusion Processes*, North Holland.
- S. Watanabe (1984), *Lectures on Stochastic Differential Equations and Malliavin calculus.* Tata Institute of Fundamental Research, Springer Verlag.

P1 Prévision statistique

Deuxième Semestre
Enseignant : Cristina Butucea.

Modélisation des séries chronologiques à mémoire courte ou longue.

P2 Statistique non paramétrique

Deuxième Semestre
Enseignant : Mohamed Hebiri.

L'objet de ce cours est de présenter quelques résultats classiques en statistique asymptotique des modèles non paramétriques.

Il ne nécessite pas de connaissances particulières en statistique mais s'appuie sur des connaissances de niveau M1 en probabilité et statistique mathématique.

Nous allons approfondir l'estimation de fonctions f (la densité de probabilité, la densité spectrale et la fonction de régression) ainsi que de fonctionnelles (l'énergie $\int f^2$, l'excess mass $\int (f-\lambda)_+$ pour un seuil $\lambda > 0$) à partir de données indépendantes, identiquement distribuées.

Les points abordés dans ce cours seront les suivants :

- Vitesses asymptotiques pour l'estimation des fonctions, théorie minimax.
- Estimateurs à noyau et par projection sur une base orthonormée (par exemple, séries de Fourier, ondelettes).
- Modèles de régression; estimateurs linéaires (moindres carrés, splines) et non linéaires (C_p de Mallows).
- Parcimonie d'un modèle ayant un très grand nombre de paramètres.
- Modèle de suites gaussiennes; estimateurs par seuillage doux et fort, méthodes BIC et Lasso pour la sélection de modèles.
- Optimalité des estimateurs.
- Estimation de fonctionnelles.
- Problèmes inverses: Il s'agit de situations où les observations dont on dispose permettent d'estimer une certaine transfomation de la fonction d'intérêt. Les méthodes d'estimation perdent en performance: leur vitesse d'estimation est plus lente que dans le problème direct. Nous cherchons à formaliser le lien entre la perte de performance et la transformation intrinsèque au problème.

Bibliographie

• Cavalier (2011). Inverse problems in statistics. Inverse problems and high-dimensional estimation, 396, *Lect. Notes Stat. Proc., 203, Springer, Heidelberg*

• Ibragimov-Hasminskii (1981). Statistical Estimation. Asymptotic Theory. *S*pringer

• Härdle, W., Kerkyacharian, G., Picard, D. and Tsybakov, A. (1998). Wavelets, approximation, and statistical applications. *Springer-Verlag, New York.*

• Tsybakov, A. B. (2004). Introduction à l'estimation non-paramétrique. *Springer-Verlag, Berlin.*

• Van der Vaart (1998). Asymptotic Statistics. Cambridge University Press.

P3 Sélection de modèles

Premier Semestre
Enseignant : Cristina Butucea

L'objectif de ce cours est de sensibiliser les étudiants aux critères de sélection de modèles et aux problèmatiques d'estimation sur données en grande dimension.

P4 Simulation et copules

Deuxième Semestre
Enseignant : Thierry Jeantheau.

Ce cours est une UE du master professionnel *IMIS* (Ingénierie Mathématique, Informatique et Statistique), avec une évaluation spécifique pour les étudiants du master recherche.

Il s'adresse à des étudiants ayant déjà reçu un cours de base en probabilités et ayant déjà étudié les chaînes de Markov. Il présente les différentes méthodes pour simuler par ordinateur des variables alátoires. Le cas des vecteurs aléatoires est aussi traité, et la notion de copule est introduite pour modéliser et simuler des structures de dépendance spécifique. On aborde l'utilisation des données simulées par les méthodes de Monte Carlo, notamment pour le calcul d'intégrale. On présente l'utilisation des chaîne de Markov pour simuler des loi compliquées (méthode MCMC), et en particulier l'algorithme de Metropolis. Enfin, on applique cette méthode pour résoudre des problèmes d'optimisation, en présentant l'algorithme du recuit simulé.

Toutes les méthodes vues dans ce cours sont également programmées par les étudiants, en utilisant un logiciel de calcul numérique (type Scilab) ou statistique (type R).

1. Méthodes de simulation des variables et des vecteurs aléatoires.
2. Introduction à la modélisation par les Copules et simulation.
3. Méthodes de Monte Carlo, application aux calculs d'intégrales.
4. Simulation par chaîne de Markov (méthode MCMC), algorithme de Metropolis.
5. Application au problème d'optimisation, algorithme du recuit simulé.

P5 Processus stochastiques

Premier Semestre
Enseignant : Miguel Martinez

Ce cours est une UE du master professionnel *IMIS* (Ingénierie Mathématique, Informatique et Statistique), avec une évaluation spécifique pour les étudiants du master recherche. Il donnera lieu à l'élaboration d'un projet sous Scilab, Octave, ou R. L'accent est mis sur la simulation et les exemples. Grandes lignes du cours :

- Chaînes de Markov à temps discret. Approche récursive.
- Théorèmes limites, couplage, simulation, méthodes MCMC.
- Processus de Poisson et chaînes de Markov a temps continu.
- Files d'attente, processus de Yule. Extensions semi-markoviennes.

P6 Matrices aléatoires et applications

Deuxième Semestre
Enseignant : Jamal Najim et Florence Merlevède

La théorie des grandes matrices aléatoires vise à décrire le spectre (ensemble des valeurs propres) et les vecteurs propres de matrices dont les entrées sont aléatoires et dont les dimensions tendent conjointement vers l'infini. Les premiers travaux remontent à Wigner (48) dans le cadre des matrices symétriques, puis à Marcenko-Pastur (67) dans le cas des matrices de covariance empirique. Les motivations initiales des travaux de Wigner et Pastur provenaient de la physique théorique qui génère toujours de nombreuses questions en théorie des grandes matrices aléatoires. Dans les années 80, Voiculescu a utilisé la théorie des matrices aléatoires comme un outil d'analyse permettant d'aborder des problèmes ouverts en théorie des opérateurs. Ce point de vue s'est avéré très fructueux puisqu'il a permis la résolution de nombreuses conjectures en théorie des opérateurs; il a aussi initié un courant de recherche substantiel et toujours très actif, dont la théorie des grandes matrices aléatoires est une pièce essentielle: la théorie des probabilités libres. Dans les années 90, la théorie des matrices aléatoires s'est avérée extremement utile pour analyser les grands systèmes de communications sans fil; elle a permis d'analyser et optimiser des réseaux de télécommunications multi-antennes, ainsi que d'apporter de nombreux développements en traitement statistique du signal (notamment en traitement d'antennes, type radar). Depuis une quinzaine d'années, la théorie des matrices aléatoires fait l'objet d'une activité très soutenue, comme en témoigne la sortie récente de 5 monographies importantes sur le sujet [1, 2, 3, 4, 5].

L'objectif de ce cours est de présenter certains résultats emblématiques de la théorie des grandes matrices aléatoires, ainsi que certaines applications statistiques aux données de grande dimension (données dont la dimension est du même ordre que la taille de l'échantillon). On présentera en particulier:

1. Techniques de base en théorie des grandes matrices aléatoires: transformée de Stieltjes.
2. Théorème de Marcenko-Pastur décrivant le comportement de la mesure empirique des valeurs propres d'une grande matrice de covariance empirique;
3. Autres modèles structurés (grandes matrices de covariance empirique, matrices du type signal + bruit); leur équation du point fixe associée;
4. Modèles à petites perturbations et à valeurs propres isolées (spiked models).

En termes d'application, on exposera entre autres le problème du test d'hypothèse pour la détection de source en grande dimension et les questions d'estimation de statistiques linéaires en grande dimension.

References:

[1] G. W. Anderson, A. Guionnet, and O. Zeitouni. An introduction to random matrices, volume 118 of Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Cambridge University Press, Cambridge, 2010.

[2] Z.D. Bai and J. W. Silverstein. Spectral analysis of large dimensional random matrices. Springer Series in Statistics. Springer, New York, second edition, 2010.

[3] R. Couillet and M. Debbah. Random matrix methods for wireless communications. Cambridge University Press, 2011.

[4] L. Pastur and M. Shcherbina. Eigenvalue distribution of large random matrices, volume 171 of Mathematical Surveys and Monographs. American Mathematical Society, Providence, RI, 2011.

[5] T. Tao. Topics in random matrix theory, volume 132 of Graduate Studies in Mathematics. American Mathematical Society, Providence, RI, 2012.

P7 Convergence vers l'équilibre des diffusions réversibles

Premier Semestre
Enseignant : Mathias Rousset

Objectifs Présenter la théorie de convergence vers l'équilibre des diffusions réversibles type Bakry-Emery; motiver avec l' exemple des systèmes mécaniques thermostatés.

Mots-clefs Processus de diffusion, entropie, convergence vers l'équilibre, critère de courbure-dimension, systèmes hamiltoniens, thermostats stochastiques.

Prérequis Notions de géométrie différentielle (variétés, sous-variétés, fonctions implicites, espace tangent, calcul variationnel sur les courbes). Notions sur les chaînes de Markov, le calcul d'Itô et les Equations Différentielles Stochastiques (EDS). Notions sur le problème de Cauchy pour les Equations aux Dérivées Partielles (EDP) paraboliques.

Durée du cours 30 h. **Validation** 2/3 examen, 1/3 projet avec ou sans simulation.

1 Rappels sur les diffusions dans $\mathbb{R}^d$ (5h)

Générateur infinitésimal des diffusions et Equations aux Dérivées Partielles paraboliques. Semi-groupe associé. Probabilité stationnaire, propriétés de réversibilité. Algorithme de Metropolis-Hasting pour le schéma d'Euler.

2 Rappels sur les variétés différentielles (5h)

Variété Riemannienne, tenseurs, opérateur de Laplace-Beltrami, générateurs réversibles associés. Processus stochastique associés (construction-motivation-simulation renvoyée à la section 4). Solution classique de l'équation parabolique associée admise dans le cas compact.

3 Convergence vers l'équilibre (10h)

Décroissance de l'entropie et inégalités de Sobolev logarithmiques. Critère de Bakry-Emery (courbure-dimension). Un exemple de lien avec la méthode de couplage et la convergence en distance de Wasserstein dans $\mathbb{R}^d$.

4 Systèmes thermostatés (10h)

Equations de Lagrange et Hamilton. Espace des phases et structure symplectique. Notions d'intégration géométrique, algorithme RATTLE. Exemple du cotangent et des contraintes mécaniques. Métrique Riemannienne induite. Processus de Langevin sur un co-tangent et approximation diffusion ves la diffusion réversible sur l'espace des configurations. Simulation et acception - rejection à la Metropolis-Hasting.

5 Ouvertures - Mini-projets

Choix d'un exemple mécanique (ex: systèmes de particules), implémentation d'un code et étude de la convergence à l'équilibre. Ou bien: approfondissement d'un problème théorique (convergence faible, tension; calcul différentiel extérieur (formes différentielles) et intégration géométrique).

P8 Cloud computing

Deuxième Semestre
Enseignant : Olivier Curé

Le cloud computing est un modèle de stockage et de calcul qui s'effectue sur un ensemble de machines distantes et accessible à travers un réseau informatique, e.g., internet. Ce modèle est prépondérant dans les contextes du 'big data' et des sciences de données. Dans ce cours nous présentons les principaux modèles (IaaS, PaaS, SaaS), approches de déploiement (public, privé, hybride), avantages et inconvénients du cloud computing. Nous nous concentrons ensuite sur l'écosystème informatique permettant de stocker, requêter et traiter de grands volumes de données. Cela consiste en un ensemble de nouveaux systèmes de bases de données (i.e., NoSQL) qui possèdent des caractéristiques bien adaptées au déluge des données. Nous terminons par une étude des plateformes permettant d'effectuer du calcul parallèle (e.g., MapReduce) ainsi que les dernières évolutions dans cet environnement trés dynamique.

A1 Outils d'analyse et équations aux dérivées partielles

Premier Semestre
Enseignant : Marco Cannone.

Le but de ce cours est de compléter les connaissances des étudiants en analyse (fonctionnelle, harmonique..) et de les initier à quelques outils utiles pour les équations aux dérivées partielles et pour l'analyse multifractale. Les sujets suivants seront abordés :

- Compléments sur les espaces de Banach : dualité, topologie faible...
- Analyse des espaces L^p : quelques propriétés, interpolation, applications...
- Rappels et compléments sur les distributions : techniques de régularisation et d'approximation, distributions tempérées, analyse de Fourier.
- Espaces de Sobolev, injection de Sobolev, théorème de compacité de Rellich. Application des espaces de Sobolev aux EDP. Principe des méthodes variationnelles. Application au problème de Dirichlet, principe du maximum.
- Introduction à l'analyse de Littlewood Paley et aux ondelettes : construction, algorithmes, exemples de bases. Caractérisation des espaces fonctionnels.
- Applications. Les équations de Navier-Stokes : approche variationnelle de J. Leray et résolution par point fixe de T. Kato.

Bibliographie :

- R.A. Adams, *Sobolev Spaces*, Academic Press, 1975.
- H. Brezis, *Analyse fonctionnelle*, Masson, 1983.
- M. Cannone *Ondelettes, paraproduits et Navier-Stokes*, Diderot 1995.
- F. Hirsch, G. Lacombe, *Eléments d'Analyse fonctionnelle*, Masson, 1997.
- Y. Meyer, *Ondelettes et opérateurs*, tome 1, Hermann, 1990.
- Y. Meyer, *Ondelettes et algorithmes concurrents*, Hermann, 1993.
- W. Rudin, *Analyse fonctionnelle*, Ediscience.
- K. Yosida, *Functional Analysis*, Springer-Verlag, sixth edition, 1995.

A2 Théorie des profils et analyse d'équations d'évolution non linéaires

Premier Semestre
Enseignant : Hajer Bahouri

Le but de ce cours est d'introduire la méthode des décompositions en profils, puis de l'appliquer sur divers exemples d'équations d'évolution non linéaires issues de la physique mathématique et la mécanique des fluides.

Comme à l'origine les décompositions en profils ont été introduites pour décrire le défaut de compacité des injections de Sobolev critiques, la première partie du cours va être consacrée aux injections des espaces de Sobolev dans les espaces de Lebesgue. On y établira ces injections puis caractérisera leur défaut de compacité.

La seconde partie du cours consiste à montrer le grand impact de cette méthode sur l'analyse des solutions des équations d'évolution non linéaires que ce soit sur le plan informations globales, explosion, étude qualitative ou stabilité.

Bibliographie :

- 1. H. Bahouri, J.-Y. Chemin et R. Danchin : Fourier Analysis and Nonlinear Partial Differential Equations, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, 343, Springer (2011).
- 2. H. Brezis, Analyse fonctionnelle, *Masson*, 1983.
- 3. P. Gérard: Description du défaut de compacité de l'injection de Sobolev, *ESAIM Control, Optimisation and Calculus of Variations*, 1998, pages 213-233.
- 4. F. Merle and L. Vega, Compactness at blow-up time for L^2 solutions of the critical nonlinear Schrödinger equation in 2D, *International Mathematical Research Notices*, 1998, pages 399-425.

A3 Équations paraboliques dégénérées et équations de Hamilton-Jacobi

Premier Semestre
Enseignants : Cyril Imbert, Regis Monneau.

Le but de ce cours est d'introduire des outils utiles à la résolution de certaines équations d'évolution, soit paraboliques soit de type Hamilton-Jacobi. Ces équations ont pour particularité d'être non-linéaires et éventuellement dégénérées. Le bon cadre est celui des solutions de viscosité.

Après avoir donné un certain nombre d'exemples et avoir délimité le cadre d'étude, la première partie du cours consiste à construire de telles solutions et à montrer qu'elles sont stables et uniques dans un certain nombre de cas. La seconde partie du cours sera consacrée au contrôle optimal avec comme motivation le contrôle stochastique utilisé en finance par exemple ou encore le trafic routier. Dans la troisième et dernière partie du cours, le but est d'expliquer comment les solutions de telles équations peuvent être simulées sur ordinateur par des schémas aux différences finies.

Bibliographie :

- G. Barles and P. E. Souganidis. Convergence of approximation schemes for fully nonlinear second order equations. *Asymptotic Anal.*, 4(3):271–283, 1991.
- Guy Barles. *Solutions de viscosité des équations de Hamilton-Jacobi*, volume 17 of *Mathématiques & Applications (Berlin) [Mathematics & Applications]*. Springer-Verlag, Paris, 1994.
- Wendell H. Fleming and H. Mete Soner. *Controlled Markov processes and viscosity solutions*, volume 25 of *Stochastic Modelling and Applied Probability*. Springer, New York, second edition, 2006.
- Pierre-Louis Lions. *Generalized solutions of Hamilton-Jacobi equations*, volume 69 of *Research Notes in Mathematics*. Pitman (Advanced Publishing Program), Boston, Mass., 1982.

A4 Analyse multifractale et traitement du signal et de l'image

Deuxième Semestre
Enseignants : Stéphane Jaffard, Stéphane Seuret.

L'analyse multifractale a d'abord été introduite en physique et en traitement du signal pour étudier et modéliser les écoulements turbulents, puis de nombreux signaux de nature très diverses (traffic, signaux physiologiques, ...). Des liens avec les EDP et la l'approximation diophantienne ont également été établis. Les ondelettes permettent actuellement l'implantation numérique de ces méthodes en analyse du signal et d'image, où ces concepts fournissent de nouveaux outils de classification et de simulation.

Le but du cours est de donner une introduction aux outils utilisés en analyse multifractale, puis de se concentrer sur un domaine d'application. Le cours comprendra donc deux parties:

1. Concepts et résultats fondamentaux.
   - Rappels de théorie de la mesure, mesures et dimensions de Hausdorff, techniques de calcul de dimensions.
   - Espaces fonctionnels (Sobolev, Besov, oscillations) et exposant de Hölder
   - bases d'ondelettes
   - Définition et majorations de spectres de singularités
   - Le formalisme multifractal: formulation mathématique et utilisation pratique en traitement du signal et de l'image
2. Des applications seront choisies dans la liste suivante :
   - Méthodes statistiques pour l'estimation de spectres de singularités de signaux et d'images: application à la classification et à l'identification de paramètres
   - Modèles de turbulence (cascades multiplicatives)
   - Séries aléatoires d'ondelettes
   - Analyse multifractale de fonctions remarquables: Fonctions de Bolzano, de Riemann, de Polya, séries de Davenport
   - Introduction aux méthodes d'ubiquité
   - Analyse multifractale des processus de Lévy, application à l'équation de Burgers
   - Analyse par ondelettes de domaines à frontières fractales

Des notes de cours seront distribuées.

A5 Modèles mathématiques aux équations différentielles ordinaires et partielles en sciences du vivant

Deuxième Semestre
Enseignants : Lucilla Corrias, Alexandre Vidal

De nombreux phénomènes dynamiques observés en sciences du vivant sont modélisés à l'aide d'équations ou systèmes d'équations différentielles. Ce cours a pour but de présenter les outils d'analyse de ces dynamiques en application à des modèles classiques. Il se structure en deux parties. La première partie est consacrée à l'analyse qualitative des systèmes dynamiques (équations différentielles ordinaires). Dans la deuxième partie nous allons montrer comment les systèmes dynamiques évoluent vers des systèmes d'équations aux dérivées partielles lorsque l'on tient compte des variables physiques et physiologiques des individus ou des populations et de leur capacité d'interaction avec l'environnement. L'analyse qualitative des solutions des modèles présentés sera également abordée dans cette deuxième partie.

Partie I (15 heures)

1. Systèmes dynamiques discrets et continus : espace des phases, flot, orbites. Exemples de modèles en Neurosciences (Hodgkin-Huxley), Biochimie (Michalis-Menten), Dynamiques de population (Lotka-Volterra et Kolmogorov, chaînes trophiques et fonctions de réponses de type de Holling), climatologie (Lorenz).

2. Points singuliers, orbites périodiques et cycles limites, connexions homoclines et hétéroclines : hyperbolicité, stabilité asymptotique, classification dans le plan, application de Poincaré, théorème de Poincaré-Bendixson. Application aux modèles de Lotka-Volterra et Kolmogorov.

3. Théorème d'existence des variétés stables, instables et centrales des points singuliers et des cycles limites. Exposants de Floquet. Théorème du *flowbox*.

4. Bifurcations et formes normales.
   (a) Conjugaison locale des flots et changement de coordonnées locales. Théorème de la variété centrale. Application à l'agrégation des chaînes trophiques et la réduction des équations biochimiques.
   (b) Bifurcations de codimension 1 des points singuliers et cycles limites. Applications aux modèles de Van der Pol et Fitzhugh-Nagumo et aux chaînes trophiques.
   (c) Bifurcations locales de codimension 2. Application à un modèle de type Hodgkin-Huxley.
   (d) Quelques exemples de bifurcations globales.

5. Dynamiques chaotiques
   (a) Exposants de Lyapunov et chaos déterministe. Application au modèle de Lorenz.
   (b) Cascade de doublements de période et route vers le chaos. Application au système d'Izhikevic.

Partie II (15 heures)

1. Des équations paraboliques en biologie.

(a) Equations et systèmes d'équations de réaction-diffusion: l'équation de Fisher/KPP (locale et non-locale), le système de Lotka-Volterra avec diffusion, le système de FitzHugh-Nagumo, le système de Gray-Scott.
(b) Systèmes d'équations de réaction-convection-diffusion: l'équation de Fokker-Planck, le système de Keller-Segel.
(c) Analyse qualitative des solutions : positivité, entropie, comportement asymptotique en temps, explosion.
(d) L'instabilité de Turing et la formation des motifs (stationnaires et evolutifs), "travelling waves", "spikes", "pulses".

2. Modèles pour la dynamiques des populations structurées.

Prérequis : équations différentielles ordinaires (EDO), équations différentielles aux dérivées partielles (EDP) en particulier les équations paraboliques et les équations de transport, bases d'analyse fonctionnelle, bases d'analyse numérique,....

Bibliographie :

- J.C. Ameisen, *Dans la lumières et les ombres. Darwin et le bouleversement du monde.* Points Seuil, 2011.
- J.C. Ameisen, *Sur les épaules de Darwin.* France Inter, émission du samedi de 11h à 12h.
- H. Brezis, *Analyse fonctionnelle, théorie et applications.* Masson, 1983.
- L.C. Evans, *Partial Differential Equations.* Graduate Studies in Mathematics, American Mathematical Society, 1998.
- P.C. Fife, *Mathematical aspects of reacting and diffusing systems.* Lecture notes in biomathematics 28, Springer Verlag, 1979.
- J.P. Françoise, *Oscillations en Biologie : Analyse qualitative et modèles* Springer, 2006.
- J. Guckenheimer and P. Holmes, *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems and Bifurcations of Vector Fields.* Springer, 1983.
- J. Hale, *Ordinary Differential Equations.* Dover, 2009.
- J. Jost, *Mathematical Methods in Biology and Neurobiology.* Springer, 2014. (http://www.mis.mpg.de/fileadmin/jjost/mathematical_methods.pdf)
- Yu. A. Kuznetsov, *Elements of Applied Bifurcation Theory.* 3rd edition, Springer, 2004.
- J.D. Murray, *Mathematical Biology I and II.* 3rd edition, Springer, 2002.
- B. Perthame, *Transport Equation in Biology.* Frontiers in Mathematics, Birkhäuser, 2007.
- B. Perthame, *Growth, reaction, movement and diffusion from biology.* Cours du M2 "Mathématiques & Applications", UPMC. http://www.ann.jussieu.fr/ perthame/cours_M2.pdf.
- S. Wiggins, *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos.* Texts in Applied Mathematics, vol. 2, Springer, 1990.

A6 Transport optimal, théorie et applications

Deuxième Semestre
Enseignants : Nathaël Gozlan, Paul-Marie Samson, Pierre-André Zitt

L'objectif de ce cours est de proposer une introduction au transport optimal et à quelques unes de ses nombreuses applications en probabilités et en analyse. Le problème de Monge à la base de cette théorie se formule de la manière suivante : étant données deux distributions de masse, l'une étant vue comme un tas de terre à déplacer et l'autre comme un trou à combler, quelle est la manière la moins coûteuse de transporter la première distribution sur la deuxième ? Dans les exemples les plus classiques le coût d'un transport de masse unité d'un point à un autre est égal à la distance ou au carré de la distance entre les points.

Dans un premier temps, nous présenterons les outils théoriques de base que sont entre autres le théorème de dualité de Kantorovich et le théorème de Brenier-McCann-Ruschendorf. Ce dernier décrit la solution au problème précédent dans le cas d'un coût quadratique : le transport optimal est obtenu en poussant la masse dans la direction donnée par le gradient d'une fonction convexe.

Nous développerons par la suite plusieurs exemples d'applications mettant en oeuvre ces outils théoriques. Le premier bloc d'applications sera consacré aux distances de transport, dites distances de Wasserstein, qui maîtrisent la topologie de la convergence étroite des mesures de probabilité. Nous verrons notamment comment elles interviennent dans des formes quantitatives du théorème limite central. Plus généralement, nous illustrerons l'utilisation de couplages pour établir la convergence de certain processus aléatoires vers l'équilibre. Le second bloc applicatif aura pour thème les inégalités fonctionnelles ou géométriques issues des propriétés de convexité (le long des chemins de transport optimaux) de certaines fonctionnelles définies sur l'espace des probabilités, telle que l'entropie de Shannon. Nous présenterons en particulier, l'inégalité de Brunn-Minkowski ainsi que sa forme fonctionnelle due à Prekopa et Leindler. Nous verrons ensuite comment ces inégalités permettent de quantifier les propriétés de concentration de certaines mesures de probabilité. Nous illustrerons la grande efficacité de ces techniques de concentration par des exemples à mi chemin entre probabilités et analyse comme le théorème de Dvoretzky ou le théorème de la limite centrale pour les corps convexes.

Plan du cours :

1. Introduction
   - Qu'est-ce qu'un couplage ? Les problèmes de Monge et de Kantorovich. Exemples dans des cas simples : le cas fini, le cas de la dimension 1. Existence d'un couplage optimal.
2. Etude des plans de transport optimaux
   - Outils de dualité convexe. Approche de la dualité de Kantorovich du point de vue l'optimisation convexe.
   - Notion de monotonie cyclique, caracérisation des plans de transport. La dualité de Kantorovich via l'approximation discrète.
   - Caractérisation du transport optimal pour un coût de transport quadratique : transport de Brenier.
3. Applications en probabilités

- Distance de Wasserstein et liens avec la convergence étroite
- Preuve quantitative du théorème limite central.
- Quelques exemples de contrôle de convergence de processus.

4. Du transport à la concentration, applications en géométrie
    - Convexité de l'entropie le long du déplacement de Brenier. Conséquences géométriques : inégalités de Prékopa–Leindler et de Brunn–Minkowski.
    - Phénomène de concentration de la mesure. Inégalités de transport.
    - Utilisation de la concentration pour des problèmes géométriques.

Bibliographie :

- Ambrosio, L., Gigli, N., *A user's guide to optimal transportation.*
- Bogachev, V. I., Kolesnikov, A., *The Monge-Kantorovich problem: achievements, connections, and perspectives.*
- Villani, C. *Topics in optimal transportation.*
- Villani, C. *Optimal transport : old and new.*

A7 Méthodes d'analyse de Fourier pour l'étude de fluides non homogènes

Deuxième Semestre
Enseignant : Raphaël Danchin

Description : Le but de ce cours est de dresser un panorama des méthodes modernes d'analyse de Fourier permettant de résoudre des systémes d'évolution non linéaires issus de la mécanique des fluides. On y abordera notamment l'étude des équations de Navier-Stokes pour les fluides non homogènes incompressibles ou compressibles.

Plan détaillé :

Partie 1 : Rappels d'analyse fonctionnelle et d'analyse harmonique.

Décomposition de Littlewood-Paley, espaces fonctionnels, fonction maximale, inégalité de Hardy-Littlewood-Sobolev, inégalités de Strichartz.

Partie 2 : Introduction au calcul paradifférentiel.

Paraproduit et décomposition de Bony. Estimations non linéaires.

Partie 3 : Quelques exemples de résolution d'équations dévolution non linéaires.

Transport, chaleur, équations dispersives.

Partie 4 : Les équations de Navier-Stokes incompressibles à densité variable.

Présentation du cadre de régularité critique. Rappels du cas homogène. Résolution locale ou globale en temps dans le cas faiblement non homogène. Approche lagrangienne.

Partie 5: Les équations de Navier-Stokes compressibles.

Résolution locale puis globale dans le cadre à régularité critique. Limite incompressible.

Bibliographie :

- 1. H. Bahouri, J.-Y. Chemin et R. Danchin : Fourier Analysis and Nonlinear Partial Differential Equations, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, 343, Springer (2011).
- 2. J.-Y. Chemin: Fluides parfaits incompressibles, Astérisque, 230 (1995).
- 3. R. Danchin: Analyse non linéaire, cours de l'cole polytechnique, http://perso-math.univ-mlv.fr/users/danchin.raphael/, version 2009.
- 4. T. Runst et W. Sickel: Sobolev spaces of fractional order, Nemytskij operators, and nonlinear partial differential equations, Nonlinear Analysis and Applications, 3. Walter de Gruyter & Co., Berlin (1996).
- 5. M. Taylor: Tools for PDE: Pseudodifferential Operators, Paradifferential Operators and Layer Potentials, Mathematical Surveys and Monographs, 8, American Mathematical Society (2000).

A8 Courbure discrète et synthèse d'image 3D

Premier Semestre
Enseignants : Laurent Hauswirth, Pascal Romon.

Ce cours introduit les concepts de base de la *géométrie différentielle discrète.* Ce domaine de recherche s'est développé dans la dernière décennie et vise à comprendre et manipuler les objets géométriques discrets : courbes polygonales et surfaces polyédriques, de façon analogue à ce qui se fait déjà en géométrie différentielle lisse. On s'intéressera aux invariants géométriques et notamment au concept de courbure, car la courbure incarne l'aspect différentiel de la géométrie. En géométrie discrète, plusieurs notions différentes coexistent, dépendant de la propriété recherchée.

Le cours mélangera les aspects théoriques et les applications, qui souvent motivent nos définitions. Nous illustrerons les notions exposées par des exemples tirés de la CAO, du dessin en 3D sur ordinateur ou de l'architecture.

Programme

- Courbure des courbes planes, courbures gaussienne et moyenne des surfaces polyédriques. Lien avec le gradient de l'aire (formule de Steiner). Défaut angulaire et image sphérique.
- Formes différentielles et opérateurs différentiels liés à la métrique (divergence, rotationnel). Décomposition de Hodge-Helmholtz et intégration des champs de vecteurs sur les surfaces polyédriques. Lien avec les éléments finis.
- Revêtements à plusieurs feuillets et intégration de distribution de vecteurs. Application au remaillage (remeshing) des surfaces polyédriques, le long des lignes de courbure.
- Flot des courbes par courbure, flot des surfaces par la courbure moyenne, courbure moyenne anisotropique et courbure moyenne avec contrainte de volume. Application au débruitage et lissage de surface (smoothing) avec ou non maintien d'arêtes.
- Isopérimétrie, recherche des géodésiques par méthode de minmax et application à la segmentation d'image.
- Discrétisation des systèmes intégrables et applications à la création d'image. Théorie de la courbure discrète avec applications à l'architecture.

Ce cours ne nécessite pas de connaissance préalable en géométrie différentielle, néanmoins une familiarité avec celle-ci sera appréciée, ainsi que des connaissances *élémentaires* en topologie différentielle ou combinatoire. Il s'adresse aussi bien aux étudiants du master 2 Mathématiques et Applications intéressés par la géométrie et l'informatique qu'aux étudiants du master 2 informatique SIS (Signal, Image Synthèse) souhaitant étoffer leur compréhension des objets 3D et des techniques récentes de traitement d'image.

Bibliographie

- Mathieu Desbrun, Eva Kanso, and Yiying Tong, *Discrete differential geometry.* In Alexander I Bobenko, Peter Schröder, John M Sullivan, and Günter M Ziegler, editors, Discrete Differential Geometry. Birkhäuser Basel, Basel, March 2008.
- Klaus Hildebrandt and Konrad Polthier, *Anisotropic filtering of non-linear surface features.* Computer Graphics Forum, 23(3):391400, 2004.

- Konrad Polthier and Eike Preuss, *Identifying vector field singularities using a discrete Hodge decom- position.* Visualization and Mathematics, 3:113134, 2003.
- John M. Sullivan, *Curvatures of Smooth and Discrete Surfaces.* In Alexander I Bobenko, Peter Schröder, John M Sullivan, and Günter M Ziegler, editors, Discrete Differential Geometry. Birkhäuser Basel, Basel, March 2008.