Université Paris-Est Marne-la-Vallée **Université Paris-Est Créteil**

École des Ponts ParisTech

Master MATHÉMATIQUES ET APPLICATIONS

Année universitaire 2017-2018

Le master recherche "Mathématiques et Applications" est une des deux spécialités du master de mathématiques de l'université Paris-Est Marne-la-Vallée. Il est organisé en cohabilitation avec l'Université Paris-Est Créteil Val-de-Marne. Le parcours Finance est opéré conjointement avec le master recherche "Mathématiques et Applications" de l'Ecole des Ponts ParisTech. Cette brochure décrit la seconde année M2.

Responsable du Master : Marco Cannone (marco.cannone@univ-mlv.fr)

Correspondant à l'Ecole des Ponts : Aurélien Alfonsi (alfonsi@cermics.enpc.fr)
Correspondant à Créteil Val-de-Marne : Hajer Bahouri (hajer.bahouri@u-pec.fr)
Correspondant à Créteil Val-de-Marne : Jacques Printems (jacques.printems@u-pec.fr)
Correspondant à Marne-la-Vallée : Rémi Rhodes (remi.rhodes@univ-mlv.fr)

Secrétariat : Marie-Monique Ribon (Marie-Monique.Ribon@univ-mlv.fr)
Tél. 01 60 95 75 32, Fax. 01 60 95 75 49
Université Paris-Est Marne-la-Vallée
Laboratoire d'analyse et de mathématiques appliquées
5 Boulevard Descartes
Cité Descartes, Champs-sur-Marne
77 454 Marne-la-Vallée CEDEX 2

http://ufr-math.univ-mlv.fr/formations/master/

Présentation de la deuxième année de master

La deuxième année du master "Mathématiques et Applications" propose aux étudiants une double formation en analyse et en probabilités et des possibilités de spécialisation dans divers domaines proches des applications industrielles. Les étudiants peuvent choisir l'un des trois parcours suivants, les numéros d'unités d'enseignement (UE) renvoyant à la liste de la page 4 :

Parcours finance Ce parcours (en partenariat avec le site Math-fi.com) est axé sur les techniques de quantification et de couverture des risques sur les marchés financiers. On y présente dans un premier temps les outils mathématiques permettant la modélisation des titres financiers (calcul stochastique, séries temporelles). Leur utilisation pour la valorisation et la gestion des risques est détaillée dans un second temps et complétée par le transfert d'expérience de professionnels de salles de marché. Un accent tout particulier est porté sur l'étude des méthodes numériques (probabilistes et analytiques) permettant l'évaluation et la couverture des outils financiers correspondants. Les spécificités de ces méthodes pour leur application au secteur des assurances ou de l'énergie sont détaillées. On insistera en particulier sur la modélisation du risque de crédit, les caractéristiques du trading haute fréquence, et l'application des méthodes d'apprentissage statistique la gestion des risques. Ce parcours s'appuie sur la formation d'ingénieurs de l'Ecole des Ponts. Ses effectifs sont limités à une vingtaine d'étudiants (hors élèves de l'Ecole des Ponts).

Le projet Mathrisk, équipe de recherche commune à l'Université Paris-Est Marne-la-Vallée, l'Ecole des Ponts ParisTech et l'INRIA (Institut National de Recherche en Informatique et Automatique), assure l'encadrement scientifique de ce parcours. Cette équipe développe en particulier un logiciel de valorisation des risques financiers en partenariat avec le milieu professionnel.

Parcours probabilités et statistique des nouvelles données Ce parcours s'appuie sur l'équipe de recherche en probabilité et statistique du Laboratoire d'Analyse et de Mathématiques Appliquées, laboratoire commun aux Universités Paris-Est Marne-la-Vallée et Paris-Est Créteil. Il présente l'avancée actuelle des méthodes probabilistes et statistiques en lien avec le traitement de l'information. En particulier, il présente les méthodes de simulations numérique et d'estimation statistique liées à l'observation de données comportementales. Avec l'essor de la récolte massive de données (e-marketing, profilage client, scoring,...), le champs d'application des méthodes présentées dans ce parcours est très vaste. Le parcours insiste en particulier sur les problématiques récentes de sélections de modèles (sparsité, échantillonnage partiel, machine learning...) en lien avec l'explosion des volumes de donnée récoltés ces dernières années.

Parcours analyse et applications (image, compressed sensing) Destiné aux étudiants intéressés par l'analyse, ce parcours est centré sur des thématiques développées dans les équipes de recherche des Universités Paris-Est Marne-la-Vallée et Paris-Est Créteil. Ce parcours permet de s'initier aux techniques les plus récentes de l'analyse dont certaines ont de remarquables applications dans les domaines de l'analyse d'images et du traitement de signaux. Le cours *courbure discrète* présente des applications en informatique (synthèse d'image) et en architecture. Les étudiants intéressés par cette thématique pourront suivre, au premier semestre, le cours *Géométrie discrète* du master 2 informatique SIS (Signal, Image Synthèse).

Parcours Bézout Les étudiants selectionnés pour le parcours Bézout `http://bezout.univ-mlv.fr` suivent l'un des parcours précédents, completé par des enseignements du Master d'informatique de l'UPEMLV.

Les parcours ci-dessus sont donnés à titre indicatif et d'autres choix sont possibles. En particulier, la variété des cours permet à de futurs **candidats à l'agrégation** de consolider leur culture mathématique tout en s'ouvrant à la modélisation.

Conditions d'admission et modalités d'inscription

La deuxième année du master "Mathématiques et Applications" s'adresse aux étudiants ayant validé une première année de master en mathématiques pures ou appliquées ou justifiant d'un niveau équivalent, ainsi qu'aux élèves des Grandes Écoles. Les étudiants sont admis sur dossier. Ils doivent préciser le ou les parcours qu'ils envisagent de suivre, sachant que les effectifs du parcours finance sont limités à une vingtaine d'étudiants (hors élèves de l'Ecole des Ponts). Dans le cas où les informations contenues dans le dossier ne permettraient pas de conclure, les candidats pourront être convoqués pour un entretien.

Les candidatures se font en ligne, sur le site https://candidatures.univ-pem.fr/ .

En cas de difficulté pour candidater par ce moyen, prendre contact avec le secrétariat (`Marie-Monique.Ribon@univ-mlv.fr`, tél 01 60 95 75 32).

Les candidats admis s'inscrivent administrativement dans l'un des deux établissements cohabilités (Universités Paris-Est Marne-la-Vallée et Paris-Est Créteil).

Une **réunion d'information** aura lieu **le vendredi 15 septembre 2017 à 10h00** à l'Université Paris-Est Marne-la-Vallée, Bâtiment Copernic, salle 3B075.

Organisation pédagogique

Le master est organisé en deux semestres. Les cours commencent le **lundi 18 septembre 2017**.

Les cours du premier semestre sont principalement des cours fondamentaux, ouvrant la voie aux cours plus spécialisés proposés au second semestre. Des séances de perfectionnement en informatique (C++) sont également prévues. Le deuxième semestre est consacré d'une part aux cours plus spécialisés (de janvier à mars) et, d'autre part, à un stage ou mémoire d'initiation à la recherche. La liste de cours donnée dans cette brochure a un caractère indicatif et pourra être modifiée dans le courant du premier semestre, en fonction des effectifs et des vœux des étudiants.

Chaque parcours est composé d'un socle d'enseignements obligatoire comptant pour 18 ECTS. Ce socle doit être complété par 4 autres cours à 6 ECTS chacun, dont au moins 3 dans le parcours correspondant. Le stage ou mémoire de fin d'étude comptabilise 18 ECTS.

Les étudiants peuvent, dans la limite d'un cours de 6 ECTS, et sous réserve de l'accord du responsable du master, suivre un cours dans d'autres masters recherche de l'Université Paris-Est Marne-la-Vallée ou même dans des masters recherche extérieurs.

Le stage d'initiation à la recherche commence au mois d'avril. Ce stage (ou mémoire) peut avoir lieu dans une équipe de recherche universitaire ou dans un laboratoire de recherche appliquée d'un organisme public ou d'une entreprise. Le stage donne lieu à une soutenance et compte pour 18 ECTS.

Contrôle des connaissances et obtention du diplôme

Chaque cours est sanctionné par un examen final ou la réalisation d'un projet.

Dans chaque parcours, pour obtenir le diplôme, un étudiant doit avoir une moyenne au moins égale à 10 dans les cours fondamentaux de son parcours, une note de stage également supérieure ou égale à 10, ainsi qu'une moyenne générale supérieure à 10.

La filière Bézout est bi-disciplinaire : chaque étudiant sélectionné doit ainsi suivre l'intégralité des enseignements de l'un des deux masters (mathématiques ou informatique) et doit valider deux modules de l'autre master. Le cursus choisi par l'étudiant sera établi en accord avec les responsables des deux masters.

Débouchés

Certains cours étant nettement orientés vers les applications, en particulier ceux des parcours **finance** et **probabilités et statistique des nouvelles données**, les étudiants peuvent trouver, à l'issue du master, des débouchés en entreprise. Les secteurs d'applications concernés sont la finance de marché (analyse quantitative, structuration etc.), le traitement statistique de données (marketing web, assurances, etc.), les problèmes d'évolution issus de la physique. Dans ces secteurs, les besoins sont importants au sein des organismes de recherche, des grandes entreprises industrielles, des assurances et des banques.

Certains étudiants, en particulier ceux qui se destinent à la carrière de chercheur ou d'enseignant-chercheur, peuvent s'orienter vers la préparation d'une thèse. La thèse peut être préparée dans une des équipes de recherche associées au master (le Laboratoire d'Analyse et de Mathématiques Appliquées (UMR 8050 CNRS) des Universités Paris-Est Marne-la-Vallée et de Paris-Est Créteil et le CERMICS, Centre d'Enseignement et de Recherche en Mathématiques, Informatique et Calcul Scientifique de l'École des Ponts).

Pour les diplômés admis à préparer une thèse, divers financements peuvent être envisagés (allocations de recherche du Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche, bourses C.I.F.R.E., bourses de l'École des Ponts, ...). Les allocations de recherche du Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche sont attribuées par l'intermédiaire des écoles doctorales. Le master a des relations privilégiées avec l'école doctorale *Mathématiques et STIC* du Pôle de Recherche et d'Enseignement Supérieur *Université Paris-Est.*

Liste des UE (contenu détaillé dans les pages suivantes)

UE du parcours finance

Fin1 Tronc commun finance (18 ECTS)

- **F0** Semaine d'ouverture Finance Quantitative
- **F0** Introduction au C++
- **F1** Calcul stochastique
- **F2** Arbitrage, volatilité et gestion de portefeuille
- **F3** Méthodes de Monte-Carlo

Fin2 Mathématiques financières approfondies (24 ECTS)

Il faut valider 4 cours à 6 ECTS (hors P4 et P6) dont au moins 3 parmi:

- **F4** Modèles de taux d'intérêt
- **F5** Microstructure des marchés financiers
- **F6** Risque de crédit
- **F7** Mesures de risque en finance
- **F8** Processus avec sauts et applications au marché de l'énergie
- **F9** Méthodes numériques et produits structurés en actuariat
- **F10** Apprentissage statistique et applications
- **F11** Introduction au Calcul de Malliavin et applications numériques en finance

UE du parcours Probabilités et Statistiques des nouvelles données

PS1 Tronc commun Probabilités et Statistiques (18 ECTS)

- **P1** Architectures Big data
- **P2** Statistique en grande dimension
- **F1** Calcul stochastique

PS2 Enseignements approfondies (24 ECTS)

Il faut valider 4 cours à 6 ECTS dont au moins 3 parmi:

- **P3** Simulation et copules
- **P4** Matrices aléatoires et applications
- **P5** Cloud computing
- **F3** Méthodes de Monte-Carlo
- **F10** Apprentissage statistique et applications
- **F11** Introduction au Calcul de Malliavin et applications numériques en finance
- **A4** Analyse multifractale et traitement du signal et de l'image
- **A9** Isopérimétries discrètes

UE du parcours Analyse et applications

AA1 Tronc commun Analyse (18 ECTS)

- **A1** Outils d'analyse et équations aux dérivées partielles
- **A2** Théorie des profils et analyse d'équations d'évolution non linéaires

AA2 Cours d'analyse approfondie et applications (24 ECTS)

Il faut valider 4 cours à 6 ECTS dont au moins 2 parmi:

- **A3** Equations dispersives non-linéaires
- **A4** Analyse multifractale et traitement du signal et de l'image
- **A5** Spectre et géométrie des domaines
- **A6** Méthodes d'analyse de Fourier pour l'étude de fluides non homogènes
- **A7** Courbure discrète et synthèse d'image 3D
- **A8** Algèbre effective et applications
- **A9** Isopérimétries discrètes

F1 Calcul Stochastique

Premier Semestre
Enseignant : Rémi Rhodes.

Le but de ce cours est de présenter les processus stochastiques à temps continu usuels et leurs principales propriétés. Ces processus permettent de modéliser par exemple le cours des titres financiers. Le lien avec les méthodes de Monte Carlo, les applications en finance et les équations aux dérivées partielles seront également discutées.

- Mouvement brownien : construction, régularité et propriétés des trajectoires.
- Martingales à temps continu, temps d'arrêt et théorème d'arrêt.
- Variation quadratique, intégrale stochastique et formule d'Itô.
- Équations différentielles stochastiques à coefficients lipschitziens. Liens avec les équations aux dérivées partielles: formule de Feynman-Kac.

Bibliographie :

- N. Bouleau, *Processus Stochastiques et Applications*, Hermann (1988).
- F. Comets, M. Meyre, *Calcul stochastique et modèles de diffusions*, Dunod (2006).
- J. Hull, *Options, futures and other derivatives*, Prentice Hall (2006).
- I. Karatzas, S. Shreve, *Brownian motion and Stochastic Calculus*, Springer-Verlag (1987).
- D. Lamberton, B. Lapeyre, *Introduction au Calcul Stochastique Appliqué à la Finance*, 2nde édition, Ellipses (1997).
- R. Portait, P. Poncet *Finance de marché*, 2nde édition, Dalloz (2009). Springer (1997).
- D. Revuz, M. Yor, *Continuous martingales and Brownian motion*, Springer-Verlag (1991).

Connaissances préalables requises : Théorie de la mesure et calcul des probabilités (voir, par exemple le livre *L'essentiel en théorie des probabilités* de J. Jacod et P. Protter, Vuibert, 2003).

F2 Arbitrage, Volatilité et gestion de portefeuille

Premier Semestre
Enseignant : Romuald Elie

Le but de ce cours est de présenter les principales méthodes quantitatives de valorisation de produits dérivé et de choix d'investissement optimal en univers incertain, modélisé par des processus en temps continu. Les problématiques de calibration des modèles et les méthodes numériques de valorisation seront également présentées. Les hypothèses sous-jacentes aux méthodes de valorisation et aux choix de modélisation seront mises en avant et leur réalisme sera discuté.

- Théorie de l'arbitrage: comparaison de portefeuilles et parité Call Put
- Etude du modèle binomial, valorisation risque neutre et couverture d'options
- Etude du modèle de Black Scholes: valorisation par méthodes de Monte Carlo et par EDP. Construction du portefeuille de couverture
- Méthodes d'estimation et de calibration de la volatilité. Smile de volatilité. Modèles à volatilité locale et stochastique.
- Introduction au contrôle stochastique: consistance dynamique et équation d'Hamilton Jacobi Bellman.
- Théorie de l'utilité espérée et applications aux choix d'investissement en univers incertain
- Problèmes d'arrêt: approximation du maximum d'un portefeuille et valorisation d'options américaines.
- Ajout de frictions sur les marchés: cas particulier de l'ajout de coûts de transaction ou de contraintes de portefeuille

Bibliographie :

- D. Lamberton, B. Lapeyre, *Introduction au Calcul Stochastique Appliqué à la Finance*, 2nde édition, Ellipses (1997).
- N. El Karoui, E. Gobet, *Les outils stochastiques des marchés financiers : une visite guidée de Einstein à Black-Scholes*, (2011).
- S. Shreve, *Stochastic Calculus for Finance Volume II: Continuous-Time Models*, (2004).
- B. Bouchard, J.-F. Chassagneux, *Valorisation de produits dérivés - Des théorèmes fondamentaux à la couverture sous contrainte de risque*, Economica (2013).

F3 Méthodes de Monte-Carlo

Premier Semestre
Enseignants : Bernard Lapeyre et Benjamin Jourdain.

L'objectif de ce cours est de dresser un panorama des méthodes de Monte-Carlo. Ces méthodes numériques basées sur la simulation de variables aléatoires figurent parmi les dix algorithmes ayant eu le plus d'influence sur le développement et la pratique de la science et de l'ingénierie au XXe siècle. Leur développement se poursuit très activement motivé par des applications aussi bien en finance, qu'en fiabilité, en simulation moléculaire ou en big data (traitement de grandes masses de données).

Partie I : Méthodes de Monte-Carlo pour le calcul d'intégrales dans $\mathbb{R}^n$

1. Moyenne empirique de variables aléatoire indépendantes et identiquement distribuées : convergence et intervalles de confiance.
2. Méthodes de réduction de variance : variables de contrôle, fonction d'importance, techniques de stratification, conditionnement, ...
3. Suites à discrépances faibles : éléments théoriques, exemples classiques (Halton, Faure, Sobol, Niederreiter, ...).
4. Calcul d'espérances conditionnelles (régression, quantification,...) et application au calcul d'options américaines.
5. Algorithmes stochastiques : algorithme de Robbins-Monro, applications à l'optimisation et à la réduction de variance.

Partie II : Méthodes de Monte-Carlo et processus stochastiques

1. Méthodes de Monte Carlo par chaînes de Markov pour simuler suivant une loi cible connue à la constante de normalisation près (algorithme de Métropolis-Hastings, échantillonneur de Gibbs, versions adaptatives).
2. Discrétisation d'équations différentielles stochastiques : schémas classiques (Euler, Milshtein), vitesses de convergence, techniques d'extrapolation, schémas d'ordre supérieur forts et faibles.
3. Simulation de modèles avec sauts.
4. Ouverture vers les méthodes particulaires pour le filtrage et la simulation d'événements rares.

Bibliographie :

- Paul Glasserman. *Monte Carlo methods in financial engineering*, volume 53 of *Applications of Mathematics (New York)*. Springer-Verlag, New York, 2004.
- Emmanuel Gobet. *Méthodes de Monte-Carlo et processus stochastiques : du linéaire au non-linéaire*, Éditions de l'École Polytechnique, 2013.
- Bernard Lapeyre, Etienne Pardoux, et Rémi Sentis. *Méthodes de Monte-Carlo pour les équations de transport et de diffusion*, volume 29 de *Mathématiques & Applications (Berlin)*. Springer-Verlag, Berlin, 1998.

F4 Modèles de taux d'intérêt

Deuxième Semestre
Enseignant : Vlad Bally, Aurélien Alfonsi et Christophe Michel.

Le but du cours est de présenter aux étudiants une introduction aux modèles usuels employés dans la théorie des taux d'intérêt. Trois classes de modèles se sont imposées. Le point de vue le plus ancien explique le comportement des taux d'intérêt par le taux court (instantané). Une multitude de modèles pour la dynamique du taux court ont été proposés, une des motivations principales étant leurs aptitudes diverses pour la calibration. Mais les modèles de taux court ont le désavantage de ne pas pouvoir expliquer l'évolution des zéro coupons en toute généralité. Une nouvelle génération de modèles est apparue : tout d'abord, le modèle de Heath-Jarrow-Merton (HJM), basé sur les *taux forward*, qui réalise une modélisation en toute généralité et a en plus des vertus du point de vue de la calibration. Puis, les "market models" - celui de Brace-Gatarek-Musiela (BGM), mais aussi celui de Jamishdian - qui focalisent leurs intérêt sur un certain type de produits financiers et établit une modélisation dans laquelle le calcul du prix de ce type de produit se fait par formules explicites.

Plan du cours
Partie 1. Modèles de taux court.
a. Présentation générale: zéro coupons, taux courts, taux forward instantanés.
b. L'équation de structure. Approche EDP et approche martingale.
c. Modèles courants de taux courts: Vasicek, Ho et Lee, Hull et White, Cox-Ingersol-Ross.
d. Modèles multi-facteurs.
e. Modèles à structure affine.
Partie 2. Modèle de Heath-Jarrow-Merton (HJM).
a. Modélisation martingale et condition de dérive de HJM.
b. Changement de numéraire et probabilités forward.
c. Formule de Black.
d. Evaluation du prix des produits courants: Caps, floors, swaps et swaptions. Taux swap.
Partie 3. Modèles de marché. Le modèle de Brace-Gatarek-Musiela (BGM).

Bibliographie :

- Björk T. (1998), *Arbitrage Theory in Continuous Time*, Oxford University Press.
- Björk T.(1997), *Interest Rate Theory*, in Runggaldier (ed.) *Financial Mathematics,* Springer Lecture Notes in Mathematics **1656**. Springer Verlag, Berlin.
- Brigo D. et Mercurio F., *Interest rate models, theory and practice*, Springer Finance, 1998.
- Lamberton D., Lapeyre B. (1997), *Introduction au Calcul Stochastique Appliqué à la Finance*, 2nde édition, Ellipses.

F5 Microstructure des marchés financiers

Deuxième Semestre
Enseignants : Aurélien Alfonsi et Sophie Laruelle.

Ce cours s'intéresse dans un premier temps aux problématiques statistiques d'estimation de la volatilité en présence de bruit de Microstructure sur les marché financiers. Ce bruit est du à une observation trop fréquente du cours des titres. Nous étudierons les méthodes statistiques classiques d'estimation des paramètres de volatilité, et verrons comment adapter les méthodes classiques à la présence de ce bruit.

Dans un second temps, le cours présentera les stratégies de liquidation de volume important de titres sur les marchés financiers, ce qui nécessite la considération de modèles spécifiques dans lequel une transaction a un impact sur le cour des titres. En effet, Lorsque l'on place un ordre de taille significative sur le marché, il faut prendre en compte son impact sur le prix de cotation. En particulier, le coût de son exécution n'est plus simplement proportionnel à son volume. Pour limiter son impact et son coût, il est généralement préférable de découper cet ordre en plusieurs ordres de taille plus petite. Pour comprendre et quantifier cela, nous présenterons des modèles de "price impact" dans lesquels nous chercherons à identifier des stratégies dexécutions optimales. Nous commencerons pas le modèle linéaire de Bertsimas et Lo et d'Almgren et Chriss avant de considérer des modèles plus sophistiqués. L'étude de ces modèle nous amènera naturellement à discuter des conditions de non arbitrage sur des échelles de temps courtes, ainsi que des stratégies utilisées par les "market makers".

F6 Risque de crédit

Deuxième Semestre
Enseignant : Vivien Brunel et Benoît Roger

Le cours " Risque de crédit " prépare les étudiants intégrer un département quantitatif (Grande banque : banque d'investissement ou Direction des risques, institution financière). La démarche pédagogique s'articule autour des trois objectifs suivants :

- expliquer l'environnement bancaire et plus particulièrement les enjeux de la gestion des risques (de crédit) dans une banque. Faire le lien avec la crise financière de 2007- et les réformes réglementaires (Bâle III),
- former les étudiants aux instruments de crédit les plus classiques (obligation, titrisation) : en comprendre les risques, les mesurer (techniques de modélisation et de simulation, stress tests), les quantifier (pricing), les gérer (dérivés de crédit),
- préparer les étudiants leur futur métier en leur proposant un projet de type " Recherche et Développement " sur des sujets d'actualité, en travaillant en groupe restreint, en mode projet.

Programme du module:

- Séance 1 : Retour sur la crise financière. Modélisation des défauts : ratings, modèles structurels dérivés de Black-Scholes
- Séance 2 : Risque de crédit individuel : la vision " marché " (pricing de bonds et CDS, modèles intensité)
- Séance 3 : Le risque de crédit sur un portefeuille de prts ; corrélation, dépendance, modèle de Vasicek
- Séance 4 : Produits structurés sur sous-jacents portefeuilles crédit ; CDO, CSO
- Séance 5 : Mesures de risque, VaR
- Séance 6 : Stress testing, capital économique et réglementaire. Vers Bâle III
- Séance 7 : Examen - tables rondes des projets

Modalités:
Le cours comprend 7 séances de 3 heures. Les 6 premières séances sont divisées en un cours magistral de deux heures suivi d'une heure de travaux dirigés. La dernière séance est consacrée aux tables rondes sur les projets des étudiants. Les différents groupes, qui ont choisi leur projet auparavant parmi la liste proposée par les enseignants, font un point sur la compréhension des sujets et définissent les objectifs du projet avec les enseignants. La soutenance du projet a lieu entre mars et début avril au plus tard.

F7 Mesures de risque en finance

Premier Semestre
Enseignants : Aurélien Alfonsi et Gilles Pages

La maîtrise des risques est au cœur des préoccupations du monde bancaire comme en témoigne les recommandations du Comité de Bâle sur le contrôle bancaire (Convergence nationale de la mesure et des normes de fonds propres). La mise en œuvre des recommandations se traduit également par des recrutements dans les services de contrôle des risques des banques. Le but de ce cours est de présenter dans une partie théorique les outils de mesure des risques concernant la salle de marché et la gestion du portefeuille d'actifs. Les principaux thèmes théoriques seront : les mesures de risques monétaires et la représentation des mesures de risque convexes, la théorie des valeurs extrêmes et la représentation multidimensionnelle des risques via les copules. Dans une deuxième partie pratique, des intervenants de la Société Générale présenteront les méthodes utilisées par les différents départements pour évaluer le risque financier.

Le programme détaillé peut être consulté sur le site

`http://cermics.enpc.fr/~alfonsi/mrf.html`.

Le cours est financé par la "Chaire Risques Financiers" de la Société Générale, l'Ecole Polytechnique et l'Ecole des Ponts. Il est commun avec le Master Probabilités et Applications de Paris 6.

Bibliographie :

- Basel Committee on Banking supervision. *International convergence of capital measurement and capital standards.*
- Föllmer H. and A. Schied (2004) *Stochastic finance. An introduction in discrete time.* De Gruyter Studies in Mathematics **27**, 2004.
- McNeil A.J., R. Frey and P. Embrechts *Quantitative risk management. Concepts, techniques and tools.* Princeton Series in Finance, 2005.
- Roncalli T. *La gestion des risques financiers.* Economica. 2004.

F8 Processus avec sauts et applications au marché de l'énergie

Deuxième Semestre
Enseignants : Jean-François Delmas et Benjamin Jourdain.

L'objectif de ce cours est d'introduire les processus de Lévy et le calcul stochastique avec sauts en vue d'applications en finance. Les processus de Lévy sont des processus à accroissements indépendants et stationnaires qui généralisent le mouvement Brownien en relâchant la propriété de continuité des trajectoires satisfaite par ce processus. Après avoir montré, au travers de la formule de Lévy-Kyntchine, que la loi d'un processus de Lévy ne dépend que d'un triplet de caractéristiques, nous donnerons une représentation des processus de Lévy à partir d'un mouvement Brownien et d'une mesure ponctuelle de Poisson. Nous construirons ensuite les intégrales stochastiques par rapport à la mesure de Poisson et à la mesure de Poisson compensée et démontrerons les formules d'Itô qui permettent de manipuler ces intégrales. Nous introduirons aussi quelques éléments de calcul stochastique pour les semimartingales générales. Nous étudierons ensuite les processus de Hawkes, que l'on peut considérer comme une généralisation des processus de Poisson dans laquelle les sauts passés influencent les sauts futurs (on parle de processus auto-excitants) et qui sont actuellement un outil très en vogue pour la modélisation des carnets d'ordres. Nous présenterons enfin les applications des processus à sauts à la modélisation du marché de commodités énergétiques: fonctionnement du marché, produits dérivés, modèles de prix à l'aide des processus de Lévy, méthodes numériques et application à la valorisation d'actifs de stockage gaz.

Une partie des séances est assurée par des intervenants d'EDF (Marie Bourrousse et Arnaud de Latour).

Ce cours a lieu à l'Ecole des Ponts.

Des notes de cours en français sont disponibles au format pdf à l'adresse http://cermics.enpc.fr/ delmas/Enseig/levy.html

F9 Méthodes numériques et produits structurés en actuariat

Deuxième Semestre
Enseignants : Jacques Printems et Ludovic Goudenège

Ce cours présente un panorama des techniques de structuration de produits financiers en lien avec les problématiques actuarielles du monde de l'assurance (Variable Annuities...). Ces produits spécifiques nécessitent des méthodologies de valorisation qui leur sont propres et seront présentées en détail. En particulier, nous étudierons les techniques reposant sur les méthodes numériques afférentes de résolution numérique d'équations aux dérivées partielles. Le cours sera agrémenté d'exemples pratiques illustrant l'utilisation de ces techniques.

De plus, les compagnies d'assurance sont soumises à des contraintes de solvabilité propres imposées à l'échelle Européenne. Pour cette raison, les calculs de fond propre nécessaires pour faire face à d'éventuelles dépréciations des encours d'une société soulèvent des problématiques de génération de scenarii économiques, calcul de quantiles et utilisation de méthodes de Monte Carlo avancées (nested Monte Carlo) qui seront présentées dans ce cours.

F10 Apprentissage statistique et applications

Deuxième Semestre
Enseignant : Romuald Elie, Jérémie Jakubowicz et Jean-Yves Audibert

Le but du cours est de présenter les principales méthodes théoriques de l'apprentissage statistique ainsi qu'un large spectre de leurs applications, en particulier pour la gestion de bases de données de taille importante. Le cours sera ponctué d'interventions de professionnels du monde le la donnée, qui viendront présenter des applications opérationnelles de ces méthodes aux domaines de l'actuariat, la finance et le marketing web.

- Fondements théoriques de l'apprentissage statistique: notion de risque et de risque empirique
- Régression logistique et classification
- Dimension de Vapnik, choix de la base de régression
- Méthode des k plus proches voisins, convexification du risque
- Réseaux de neurones
- Mise jour de pondération d'estimateurs et application en gestion de portefeuille.
- Exemples d'applications en Actuariat, Finance et marketing web.

F11 Introduction au Calcul de Malliavin et applications numériques en finance

Deuxième Semestre
Enseignant : Vlad Bally

Le but du cours est de donner une introduction élémentaire au Calcul de Malliavin et à ses applications, avec un intérêt particulier pour les applications numériques en finance. Les étudiants sont sensés avoir suivi un cours de calcul stochastique de base. Les points principaux du cours seront les suivants.

- **Présentation Générale.** Formule d'intégration par parties générale et applications. Les opérateurs différentiels et la formule de dualité : cas fini-dimensionnel et passage à la limite. Formule de représentation de Clark-Ocone et calcul de la couverture. Applications aux diffusions.
- **Calculs de sensibilités.** Les *grecques.*
- **Options américaines.** Calcul de l'espérance conditionnelle. Programation dynamique et méthode de Monte Carlo. Localisation (réduction de variance).
- **Espaces de Sobolev sur l'espace de Wiener.**
- **Décomposition en chaos.**

Bibliographie :

- D Nualart (1995), *The Malliavin calculus and related topics.* Springer Verlag.
- N. Ikeda and S. Watanabe (1989), *Stochastic Differential Equations and Diffusion Processes*, North Holland.
- S. Watanabe (1984), *Lectures on Stochastic Differential Equations and Malliavin calculus.* Tata Institute of Fundamental Research, Springer Verlag.

P1 Architectures Big data

Premier Semestre
Enseignant : Roland Trosic

Le but du cours est de présenter les architectures Big Data et de présenter les apports de ces technologies auprès des entreprises.

1. Des systèmes d'information "classiques" au Big Data
2. Les apports du Big Data pour les entreprises
3. Présentation des architectures Big Data dans l'entreprise
4. Présentation des bases de données documentaires et distribuées
5. Présentation des outils d'analyse
6. Machine Learning ou apprentissage automatique

Les technologies suivantes seront vues dans le cadre du cours: Hadoop, Json, MongoDB, Elastic Search, Microsoft Azure, ML Azure, Python.

Bibliographie :

Rudi Bruchez (2015) - Les bases de données NOSQL et le Big Data Editions Eyrolles
Kristina Chodorow (2013) - MongoDB - The Definitive Guide 2e - O'reilly
Lemberger, Batty, Morel, Raffaelli (2015) - Big Data et Machine Learning - Broché
Cointot et Eychenne (2014) - La Révolution Big Data - Dunod
Owens, Lentz (2014) - Hadoop par la pratique - Broché

Sitographie :

http://popenclassrooms.com : site de cours en lignes
http://www.mongodb.org : site institutionnel de la société MongoDB
https://www.elastic.co : site institutionnel de la société Elastic

P2 Statistique en grande dimension

Premier Semestre
Enseignant : Mohamed Hebiri

Ce cours est constitué en trois parties: résultats classiques en statistique asymptotique des modèles non paramétriques, parcimonie et méthodes pour les données massives, analyse de données fonctionnelles.

Il ne nécessite pas de connaissances particulières en statistique mais s'appuie sur des connaissances de niveau M1 en probabilité et statistique mathématique.

Les points abordés dans ce cours seront les suivants :

I. Vitesses asymptotiques pour l'estimation des fonctions, théorie minimax.

   - Estimateurs à noyau et par projection sur une base orthonormée (par exemple, séries de Fourier, ondelettes).

   - Modèles de régression; estimateurs linéaires (moindres carrés, splines) et non linéaires (C_p de Mallows).

II. Parcimonie d'un modèle ayant un très grand nombre de paramètres.

   - Modèle de suites gaussiennes; estimateurs par seuillage doux et fort, méthodes BIC et Lasso pour la sélection de modèles.

   - Estimation de fonctionnelles.

III Analyse de données fonctionnelles

Bibliographie

• Ibragimov-Hasminskii (1981). Statistical Estimation. Asymptotic Theory. *S*pringer

• Härdle, W., Kerkyacharian, G., Picard, D. and Tsybakov, A. (1998). Wavelets, approximation, and statistical applications. *Springer-Verlag, New York.*

• Tsybakov, A. B. (2004). Introduction à l'estimation non-paramétrique. *Springer-Verlag, Berlin.*

• Van der Vaart (1998). Asymptotic Statistics. Cambridge University Press.

P3 Simulation et copules

Premier Semestre
Enseignant : Thierry Jeantheau.

Ce cours est aussi une UE du master professionnel *Actuariat.* Il s'adresse à des étudiants ayant déjà reçu un cours de base en probabilités, ayant déjà étudié les chaînes de Markov, et des connaissances du logiciel *R* sont souhaitables. Il présente les différentes méthodes pour simuler par ordinateur des variables alátoires. Le cas des vecteurs aléatoires est aussi traité, et la notion de copule est introduite pour modéliser et simuler des structures de dépendance spécifique. On aborde l'utilisation des données simulées par les méthodes de Monte Carlo, notamment pour le calcul d'intégrale. On présente l'utilisation des chaîne de Markov pour simuler des loi compliquées (méthode MCMC), et en particulier l'algorithme de Metropolis. Enfin, on applique cette méthode pour résoudre des problèmes d'optimisation, en présentant l'algorithme du recuit simulé.

L'accent sera mis sur la mise en pratique de ces méthodes, qui seront programmées par les étudiants, en utilisant le logiciel statistique *R*.

1. Méthodes de simulation des variables et des vecteurs aléatoires.
2. Introduction à la modélisation par les Copules et simulation.
3. Méthodes de Monte Carlo, application aux calculs d'intégrales.
4. Simulation par chaîne de Markov (méthode MCMC), algorithme de Metropolis.
5. Application au problème d'optimisation, algorithme du recuit simulé.

P4 Matrices aléatoires et applications

Deuxième Semestre
Enseignant : Jamal Najim et Florence Merlevède

La théorie des grandes matrices aléatoires vise à décrire le spectre (ensemble des valeurs propres) et les vecteurs propres de matrices dont les entrées sont aléatoires et dont les dimensions tendent conjointement vers l'infini. Les premiers travaux remontent à Wigner (48) dans le cadre des matrices symétriques, puis à Marcenko-Pastur (67) dans le cas des matrices de covariance empirique. Les motivations initiales des travaux de Wigner et Pastur provenaient de la physique théorique qui génère toujours de nombreuses questions en théorie des grandes matrices aléatoires. Dans les années 80, Voiculescu a utilisé la théorie des matrices aléatoires comme un outil d'analyse permettant d'aborder des problèmes ouverts en théorie des opérateurs. Ce point de vue s'est avéré très fructueux puisqu'il a permis la résolution de nombreuses conjectures en théorie des opérateurs; il a aussi initié un courant de recherche substantiel et toujours très actif, dont la théorie des grandes matrices aléatoires est une pièce essentielle: la théorie des probabilités libres. Dans les années 90, la théorie des matrices aléatoires s'est avérée extremement utile pour analyser les grands systèmes de communications sans fil; elle a permis d'analyser et optimiser des réseaux de télécommunications multi-antennes, ainsi que d'apporter de nombreux développements en traitement statistique du signal (notamment en traitement d'antennes, type radar). Depuis une quinzaine d'années, la théorie des matrices aléatoires fait l'objet d'une activité très soutenue, comme en témoigne la sortie récente de 5 monographies importantes sur le sujet [1, 2, 3, 4, 5].

L'objectif de ce cours est de présenter certains résultats emblématiques de la théorie des grandes matrices aléatoires, ainsi que certaines applications statistiques aux données de grande dimension (données dont la dimension est du même ordre que la taille de l'échantillon). On présentera en particulier:

1. Techniques de base en théorie des grandes matrices aléatoires: transformée de Stieltjes.
2. Théorème de Marcenko-Pastur décrivant le comportement de la mesure empirique des valeurs propres d'une grande matrice de covariance empirique;
3. Autres modèles structurés (grandes matrices de covariance empirique, matrices du type signal + bruit); leur équation du point fixe associée;
4. Modèles à petites perturbations et à valeurs propres isolées (spiked models).

En termes d'application, on exposera entre autres le problème du test d'hypothèse pour la détection de source en grande dimension et les questions d'estimation de statistiques linéaires en grande dimension.

References:

[1] G. W. Anderson, A. Guionnet, and O. Zeitouni. An introduction to random matrices, volume 118 of Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Cambridge University Press, Cambridge, 2010.

[2] Z.D. Bai and J. W. Silverstein. Spectral analysis of large dimensional random matrices. Springer Series in Statistics. Springer, New York, second edition, 2010.

[3] R. Couillet and M. Debbah. Random matrix methods for wireless communications. Cambridge University Press, 2011.

[4] L. Pastur and M. Shcherbina. Eigenvalue distribution of large random matrices, volume 171 of Mathematical Surveys and Monographs. American Mathematical Society, Providence, RI, 2011.

[5] T. Tao. Topics in random matrix theory, volume 132 of Graduate Studies in Mathematics. American Mathematical Society, Providence, RI, 2012.

P5 Cloud computing

Deuxième Semestre
Enseignant : Olivier Curé

Le cloud computing est un modèle de stockage et de calcul qui s'effectue sur un ensemble de machines distantes et accessible à travers un réseau informatique, e.g., internet. Ce modèle est prépondérant dans les contextes du 'big data' et des sciences de données. Dans ce cours nous présentons les principaux modèles (IaaS, PaaS, SaaS), approches de déploiement (public, privé, hybride), avantages et inconvénients du cloud computing. Nous nous concentrons ensuite sur l'écosystème informatique permettant de stocker, requêter et traiter de grands volumes de données. Cela consiste en un ensemble de nouveaux systèmes de bases de données (i.e., NoSQL) qui possèdent des caractéristiques bien adaptées au déluge des données. Nous terminons par une étude des plateformes permettant d'effectuer du calcul parallèle (e.g., MapReduce) ainsi que les dernières évolutions dans cet environnement trés dynamique.

A1 Outils d'analyse et équations aux dérivées partielles

Premier Semestre
Enseignant : Marco Cannone.

Le but de ce cours est de compléter les connaissances des étudiants en analyse (fonctionnelle, harmonique..) et de les initier à quelques outils utiles pour les équations aux dérivées partielles et pour l'analyse multifractale. Les sujets suivants seront abordés :

- Compléments sur les espaces de Banach : dualité, topologie faible...
- Analyse des espaces L^p : quelques propriétés, interpolation, applications...
- Rappels et compléments sur les distributions : techniques de régularisation et d'approximation, distributions tempérées, analyse de Fourier.
- Espaces de Sobolev, injection de Sobolev, théorème de compacité de Rellich. Application des espaces de Sobolev aux EDP. Principe des méthodes variationnelles. Application au problème de Dirichlet, principe du maximum.
- Introduction à l'analyse de Littlewood Paley et aux ondelettes : construction, algorithmes, exemples de bases. Caractérisation des espaces fonctionnels.
- Applications. Les équations de Navier-Stokes : approche variationnelle de J. Leray et résolution par point fixe de T. Kato.

Bibliographie :

- R.A. Adams, *Sobolev Spaces*, Academic Press, 1975.
- H. Brezis, *Analyse fonctionnelle*, Masson, 1983.
- M. Cannone *Ondelettes, paraproduits et Navier-Stokes*, Diderot 1995.
- F. Hirsch, G. Lacombe, *Eléments d'Analyse fonctionnelle*, Masson, 1997.
- Y. Meyer, *Ondelettes et opérateurs*, tome 1, Hermann, 1990.
- Y. Meyer, *Ondelettes et algorithmes concurrents*, Hermann, 1993.
- W. Rudin, *Analyse fonctionnelle*, Ediscience.
- K. Yosida, *Functional Analysis*, Springer-Verlag, sixth edition, 1995.

A2 Théorie des profils et analyse d'équations d'évolution non linéaires

Premier Semestre
Enseignant : Hajer Bahouri

Le but de ce cours est d'introduire la méthode des décompositions en profils, puis de l'appliquer sur divers exemples d'équations d'évolution non linéaires issues de la physique mathématique et la mécanique des fluides.

Comme à l'origine les décompositions en profils ont été introduites pour décrire le défaut de compacité des injections de Sobolev critiques, la première partie du cours va être consacrée aux injections des espaces de Sobolev dans les espaces de Lebesgue. On y établira ces injections puis caractérisera leur défaut de compacité.

La seconde partie du cours consiste à montrer le grand impact de cette méthode sur l'analyse des solutions des équations d'évolution non linéaires que ce soit sur le plan informations globales, explosion, étude qualitative ou stabilité.

Bibliographie :

- 1. H. Bahouri, J.-Y. Chemin et R. Danchin : Fourier Analysis and Nonlinear Partial Differential Equations, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, 343, Springer (2011).
- 2. H. Brezis, Analyse fonctionnelle, *Masson*, 1983.
- 3. P. Gérard: Description du défaut de compacité de l'injection de Sobolev, *ESAIM Control, Optimisation and Calculus of Variations*, 1998, pages 213-233.
- 4. F. Merle and L. Vega, Compactness at blow-up time for L^2 solutions of the critical nonlinear Schrödinger equation in 2D, *International Mathematical Research Notices*, 1998, pages 399-425.

A3 Equations dispersives non-linéaires

Premier Semestre
Enseignant : Galina Perelman

Les équations aux dérivées partielles non-linéaires dispersives apparaissent comme des modèles universels dans divers domaines de la physique et de l'ingénierie (optique non-linéaire, physique des plasmas, mécanique des fluides, mécanique quantique, ...). Le but de ce cours est de fournir une introduction aux méthodes et aux résultats de la théorie moderne de ces équations en se basant sur deux exemples modèles: l'équation de Schödinger non-linéaire et l'équation de Korteweg-de Vries. Les sujets suivants seront abordés:

• Théorie linéaire, estimations de Strichartz.
• Problème de Cauchy local.
• Comportement des solutions en temps longs: existence globale/explosion en temps fini, scattering, existence et stabilité des ondes solitaires.
• Analyse de l'équation de Schrödinger non-linéaire critique pour l'énergie à données grandes, méthode de concentration-compacité.

Bibliographie:

• T. Cazenave, *Semilinear Schrödinger equation*, Courant Lecture Notes in Mathematics, v. 10, New York, 2003.

• C.E. Kenig, F. Merle, *Global well-posedness, scattering and blow-up for the energy- critical, focusing, non-linear Schrödinger equation in the radial case*, Invent. Math. 166 (2006), 645–675.

• H. Koch, D. Tataru, M. Visan, Dispersive equations and nonlinear waves, Oberwolfach Seminars, v. 45, Birkhäuser, 2014.

• T. Tao: *Nonlinear dispersive equations: local and global analysis*, CBMS Regional Conference Series in Mathematics, v. 106, 2006.

A4 Analyse multifractale et traitement du signal et de l'image

Deuxième Semestre
Enseignants : Stéphane Jaffard et Nicolae Mihalache

L'analyse multifractale a d'abord été introduite en physique et en traitement du signal pour étudier et modéliser les écoulements turbulents, puis de nombreux signaux de nature très diverses (traffic, signaux physiologiques, ...). Des liens avec les EDP et la l'approximation diophantienne ont également été établis. Les ondelettes permettent actuellement l'implantation numérique de ces méthodes en analyse du signal et d'image, où ces concepts fournissent de nouveaux outils de classification et de simulation.

Le but du cours est de donner une introduction aux outils utilisés en analyse multifractale, puis de se concentrer sur un domaine d'application.

Le cours comprendra donc deux parties:

1. Concepts et résultats fondamentaux.
   - Rappels de théorie de la mesure, mesures et dimensions de Hausdorff, techniques de calcul de dimensions.
   - Espaces fonctionnels (Sobolev, Besov, oscillations) et exposant de Hölder
   - bases d'ondelettes
   - Définition et majorations de spectres de singularités
   - Le formalisme multifractal: formulation mathématique et utilisation pratique en traitement du signal et de l'image
2. Des applications seront choisies dans la liste suivante :
   - Méthodes statistiques pour l'estimation de spectres de singularités de signaux et d'images: application à la classification et à l'identification de paramêtres
   - Modèles de turbulence (cascades multiplicatives)
   - Séries aléatoires d'ondelettes
   - Analyse multifractale de fonctions remarquables: Fonctions de Bolzano, de Riemann, de Polya, séries de Davenport
   - Introduction aux méthodes d'ubiquité
   - Analyse multifractale des processus de Lévy, application à l'équation de Burgers
   - Analyse par ondelettes de domaines à frontières fractales
   - Liens avec les systèmes dynamiques et les suites automatiques

Des notes de cours seront distribuées.

A5 Spectre et géométrie des domaines

Deuxième Semestre
Enseignant : Laurent Mazet

Le but de ce cours est de présenter plusieurs résultats reliant la géométrie d'un domaine Ω de $\mathbb{R}^n$ avec le spectre d'opérateurs de type Schrödinger, c'est-à-dire des opérateurs de la forme $L = \Delta + q$ où q est une fonction définie sur le domaine Ω appelé potentiel.

Dans une première partie, on donnera des éléments de la théorie des équations aux dérivées partielles linéaires elliptiques du second ordre nécessaires à la définition du spectre d'un tel opérateur. On expliquera aussi comment le spectre est caractérisé en termes variationnels.

Dans une deuxième partie, on présentera plusieurs résultats anciens et récents portant sur le lien entre la géométrie du domaine et le spectre d'un tel opérateur (inégalité de Faber-Krahn, loi de Weyl, estimé du λ_1, trou spectral, ...).

Bibliographie :

H. Brezis, Analyse fonctionelle, Dunod.
I. Chavel, Eigenvalues in Riemannian geometry, Academic Press.
L.C.Evans, Partial Differential Equations, AMS.

A6 Méthodes d'analyse de Fourier pour l'étude de fluides non homogènes

Deuxième Semestre
Enseignant : Frédéric Charve et Raphaël Danchin

Description : Le but de ce cours est de dresser un panorama des méthodes modernes d'analyse de Fourier permettant de résoudre des systémes d'évolution non linéaires issus de la mécanique des fluides. On y abordera notamment l'étude des équations de Navier-Stokes pour les fluides non homogènes incompressibles ou compressibles.

Plan détaillé :

Partie 1 : Rappels d'analyse fonctionnelle et d'analyse harmonique.

Décomposition de Littlewood-Paley, espaces fonctionnels, fonction maximale, inégalité de Hardy-Littlewood-Sobolev, inégalités de Strichartz.

Partie 2 : Introduction au calcul paradifférentiel.

Paraproduit et décomposition de Bony. Estimations non linéaires.

Partie 3 : Quelques exemples de résolution d'équations dévolution non linéaires.

Transport, chaleur, équations dispersives.

Partie 4 : Les équations de Navier-Stokes incompressibles à densité variable.

Présentation du cadre de régularité critique. Rappels du cas homogène. Résolution locale ou globale en temps dans le cas faiblement non homogène. Approche lagrangienne.

Partie 5: Les équations de Navier-Stokes compressibles.

Résolution locale puis globale dans le cadre à régularité critique. Limite incompressible.

Bibliographie :

- 1. H. Bahouri, J.-Y. Chemin et R. Danchin : Fourier Analysis and Nonlinear Partial Differential Equations, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, 343, Springer (2011).
- 2. J.-Y. Chemin: Fluides parfaits incompressibles, Astérisque, 230 (1995).
- 3. R. Danchin: Analyse non linéaire, cours de l'École polytechnique, http://perso-math.univ-mlv.fr/users/danchin.raphael/, version 2009.
- 4. T. Runst et W. Sickel: Sobolev spaces of fractional order, Nemytskij operators, and nonlinear partial differential equations, Nonlinear Analysis and Applications, 3. Walter de Gruyter & Co., Berlin (1996).
- 5. M. Taylor: Tools for PDE: Pseudodifferential Operators, Paradifferential Operators and Layer Potentials, Mathematical Surveys and Monographs, 8, American Mathematical Society (2000).

A7 Courbure discrète et synthèse d'image 3D

Premier Semestre
Enseignants : Laurent Hauswirth et Pascal Romon.

Ce cours introduit les concepts de base de la *géométrie différentielle discrète.* Ce domaine de recherche s'est développé dans la dernière décennie et vise à comprendre et manipuler les objets géométriques discrets : courbes polygonales et surfaces polyédriques, de façon analogue à ce qui se fait déjà en géométrie différentielle lisse. Nous nous intéresserons aux invariants géométriques et notamment á la courbure, qui incarne l'aspect différentiel de la géométrie, et on verra qu'en géométrie discrète, plusieurs notions de courbure coexistent, dépendant de la propriété recherchée. Le cours mélangera les aspects théoriques et les applications, qui souvent motivent nos définitions. Nous illustrerons les notions exposées par des exemples tirés de la CAO, du dessin en 3D sur ordinateur ou de l'architecture, et étudierons en particulier le flot par la courbure (*curvature flow*), aux nombreuses applications (reconstruction, lissage, etc.).

Les cours théoriques seront complétés par des séances de TP avec machines, afin de coder les formules étudiées et d'aborder les problèmes théoriques et pratiques de la géométrie discrète.

Ce cours ne nécessite pas de connaissance préalable en géométrie différentielle, néanmoins une familiarité avec celle-ci sera appréciée, ainsi que des connaissances *élémentaires* en calcul différentiel et combinatoire. Il s'adresse aussi bien aux étudiants du master 2 Mathématiques et Applications intéressés par la géométrie et l'informatique qu'aux étudiants du master 2 informatique SIS (Signal, Image Synthèse) souhaitant étoffer leur compréhension des objets 3D et des techniques récentes de traitement d'image.

Bibliographie

- Mathieu Desbrun, Eva Kanso, and Yiying Tong, *Discrete differential geometry.* In Alexander I Bobenko, Peter Schröder, John M Sullivan, and Günter M Ziegler, editors, Discrete Differential Geometry. Birkhäuser Basel, Basel, March 2008.

- Klaus Hildebrandt and Konrad Polthier, *Anisotropic filtering of non-linear surface features.* Computer Graphics Forum, 23(3):391400, 2004.

- John M. Sullivan, *Curvatures of Smooth and Discrete Surfaces.* In Alexander I Bobenko, Peter Schröder, John M Sullivan, and Günter M Ziegler, editors, Discrete Differential Geometry. Birkhäuser Basel, Basel, March 2008.

A8 Algèbre effective et applications

Deuxième Semestre
Enseignants : Nicolas Borie et Stéphane Sabourau

Ce cours, situé à l'interface entre les mathématiques et l'informatique, s'inscrit dans les thèmes de recherche Mathématiques discrètes et algorithmes et Images et géométrie portés par le Labex Bézout.

Les techniques algorithmiques liées aux structures algébriques ont connu un grand nombre d'applications dans des domaines comme la combinatoire, l'algèbre, la géométrie algébrique, la cryptographie, la robotique, etc.

Ce cours vise à faire le lien entre théorie, algorithmes et applications mettant en jeu des systèmes d'équations polynomiales à plusieurs indéterminées. Ces systèmes peuvent être considérés comme des variétés algébriques ou comme des idéaux dans l'algèbre des polynômes selon que l'on adopte un point de vue géométrique ou algébrique. L'idée est de simplifier ces systèmes à l'aide d'algorithmes effectifs permettant de se ramener à des bases dites de Gröbner particulièrement bien adaptées. Un des objectifs du cours est de présenter la théorie de l'élimination et de l'extension liée aux bases de Gröbner en l'illustrant à l'aide de nombreux exemples concrets.

Un aspect particulièrement formateur de ce cours est le va-et-vient constant entre théorie et pratique. En effet, même si les logiciels de calcul formel que nous utiliserons dans ce cours permettent d'effectuer un grand nombre de calculs, il est nécessaire de s'appuyer sur la théorie pour faire un tri pertinent parmi l'ensemble des expressions algébriques recueillies. Nous verrons également des applications de ces méthodes constructives à la combinatoire, l'algèbre, la géométrie ou la robotique.

Bibliographie

- Alexandre Casamayou, Nathann Cohen, Guillaume Connan, Thierry Dumont, Laurent Fousse, Francois Maltey, Matthias Meulien, Marc Mezzarobba, Clément Pernet, Nicolas M. Thiery, et al. : Calcul mathématique avec Sage, 2014 (disponible sur HAL) https://hal.inria.fr/inria-00540485v2/document

- Bhubaneswar M.: Algorithmic Algebra, Monographs in Computer Science, Springer - Verlag, 1993.

- Cox D., Little J., O'Shea D. : Ideals, varieties and algorithms, Second edition. New York, Springer - Verlag 1997.

- - Eisenbud D.: Commutative Algebra: With a View Toward Algebraic Geometry. Graduate Text in Mathematics, Springer, 1999.

A9 Isopérimétries discrètes

Deuxième Semestre
Enseignants : Matthieu Fradelizi, Xavier Goaoc et Alfredo Hubard

Résumé. Ce cours aborde différentes facettes de la notion d'isopérimétrie en mathématiques discrètes et plusieurs applications, notamment algorithmiques : fonctions booléennes, séparateurs dans les graphes planaires, graphes expanseurs...

Synopsis. Le cours abordera divers fondements (convexité, isopérimétrie continue, Brunn-Minkowski, convexité combinatoire, graphes planaires et aléatoires), des aspects combinatoires d'hypergraphes ou de complexes simpliciaux (dimension de Vapnik-Chervonenkis, lemme de Sauer, théorème de Kruskal-Katona, introduction de techniques de preuve par compression), l'isopérimétrie dans l'hypercube (théorèmes de Harper, preuve par compression, application à l'influence de fonctions booléennes et aux systèmes de vote), les phénomènes de seuil dans les graphes d'Erdös-Renyi (connectivité et cas des propriétés monotones), l'isopérimétrie dans les graphes planaires (théorème des séparateurs planaires par *circle packing theorem*, plongements D-isométriques, lien avec les coupes et les coupes minimales) et les graphes expanseurs (inégalité de Cheeger, construction de graphes expanseurs, applications algorithmiques).

Organisation. Le cours est organisé en 15 séances de CM de 2h, réparties entre les trois intervenants, accompagné de travail à rendre.