Université Marne-la-Vallée — **Licence L2**

Second semestre 2016/2017 — **Analyse**

TD 1 : Suites de fonctions

1 Premiers exemples

Exercice 1. Étudier la convergence simple et uniforme des suites de fonctions (f_n) suivantes.

a) $f_n : x \in \mathbb{R}_+ \mapsto \dfrac{x}{n(1+x^n)}$.

b) $f_n : x \in \mathbb{R} \mapsto \dfrac{nx}{1+n^2x^2}$.

c) $f_n : x \in \mathbb{R} \mapsto \dfrac{nx^3}{1+nx^2}$.

d) $f_n : x \in \mathbb{R} \mapsto \dfrac{2^n x}{1+n2^n x^2}$.

e) $f_n : x \in \mathbb{R}_+ \mapsto nx^2 \mathrm{e}^{-nx}$.

f) $f_n : x \in \mathbb{R}_+ \mapsto \mathrm{e}^{-nx}\sin(nx)$.

g) $f_n : x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto n|\ln x|^n$.

h) $f_n : x \in \mathbb{R}_+ \mapsto \sin\sqrt{x+4\pi^2n^2} - \dfrac{x}{4n\pi}$.

i) $f_n : x \in [0,\pi] \mapsto \begin{cases} \frac{\sin x}{x(1+nx)} \text{ si } x \neq 0 \\ 1 \text{ si } x = 0. \end{cases}$

j) $f_n : x \in \mathbb{R} \mapsto \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{nx}\right) \text{ si } x \neq 0 \\ 0 \text{ si } x = 0. \end{cases}$

k) $f_n : x \in \mathbb{R} \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ nx & \text{si } x \in [0,1/n] \\ 1 & \text{si } x > 1/n. \end{cases}$

l) $f_n : x \in [0,2] \mapsto \begin{cases} n^2x & \text{si } x \in [0,1/n[\\ -n^2x+2n & \text{si } x \in [1/n,2/n[\\ 0 & \text{si } x \in [2/n,2]. \end{cases}$

Exercice 2. Étudier la convergence simple et uniforme de la suite de fonctions (f_n) suivante:

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ f_n : x \in \mathbb{R}_+ \mapsto n^\alpha x \mathrm{e}^{-nx},\ \alpha \in \mathbb{R}_+.$$

2 Étude théorique de la convergence d'une suite de fonctions

Exercice 3. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions qui converge uniformément sur I. Montrer que si chaque f_n est uniformément continue sur I, la limite uniforme est uniformément continue sur I.

Exercice 4. Soit un ensemble non vide $X \subset \mathbb{R}$ et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions convergeant uniformément sur X. Montrer que si

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in X,\quad f_n(x) \in \{0,1\},$$

alors $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est stationnaire.

Exercice 5. Soit f une application continue de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$, non identiquement nulle, telle que $f(0) = 0$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$. Posons, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$f_n(x) = f(nx),\quad g_n(x) = f\left(\frac{x}{n}\right).$$

1. Étudier la convergence simple et uniforme de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et de $(g_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
2. Montrer que les suites $(\frac{f_n}{n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(\frac{g_n}{n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ convergent uniformément sur $\mathbb{R}_+$.

Exercice 6. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. On considère une suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de polynômes de $\mathbb{R}_p[X]$ qui converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers une application notée P. On pose, pour tout $i \in \{0, \dots, p\}$,

$$L_i = \prod_{\substack{0\leqslant j\leqslant p \\ j\neq i}} \frac{X-j}{i-j}.$$

1. Montrer que P appartient à $\mathbb{R}_p[X]$ (on pensera à utiliser les L_i).
2. Montrer que la suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers P sur tout compact de $\mathbb{R}$.
3. On suppose que la suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$. Montrer qu'à partir d'un certain rang, $P - P_n$ est un polynôme constant qui, en fonction de n, tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 7. On considère sur $\mathbb{R}_+$ la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, où pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$f_n(x) = x + \frac{1}{n}.$$

1. Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}_+$.
2. La suite de fonctions $(f_n^2)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge-t-elle uniformément sur $\mathbb{R}_+$?

Exercice 8. Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On considère sur $\mathbb{R}$ la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, où pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$f_n(x) = \frac{\big(f(x)\big)^2}{\sqrt{\big(f(x)\big)^2 + \frac{1}{n}}}.$$

Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers $|f|$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 9. On considère sur $\mathbb{R}$ la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, où pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}.$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$. La limite uniforme est-elle de classe $\mathcal{C}^1$?

Exercice 10. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$, de dérivée seconde bornée sur $\mathbb{R}$. Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, où pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$f_n(x) = n\left(f\left(x + \frac{1}{n}\right) - f(x)\right)$$

converge uniformément vers f'.

Exercice 11. Soit $k \in \mathbb{N}$ et soit $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^{k+1}$ telle que

$$\forall i \in \{0, \dots, k\}, \quad f^{(i)}(1) = 0.$$

1. Montrer que pour tout $x \in [0, 1]$,

$$|f(x)| \leqslant M\frac{(1-x)^{k+1}}{(k+1)!},$$

   où M est une borne à préciser.

2. Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers 0 sur $[0,1]$, où l'on a posé pour tout $n\in\mathbb{N}^*$
$$f_n(x)=n^k x^n f(x).$$

Exercice 12.

1. Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, où pour tout $n\in\mathbb{N}$
$$f_n : x\in[0,1]\mapsto nx^n(1-x)$$
converge simplement et non uniformément vers la fonction constante nulle, puis montrer que
$$\int_0^1 f_n(x)dx \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

2. Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0,1\}}$, où pour tout $n\in\mathbb{N}\setminus\{0,1\}$
$$f_n(x)=\begin{cases}(-1)^n n^3 x & \text{si } x\in[0,1/n]\\ (-1)^{n+1}n^3\left(x-\frac{2}{n}\right) & \text{si } x\in[1/n,2/n]\\ 0 & \text{si } x\in[2/n,1],\end{cases}$$
converge simplement et non uniformément vers la fonction constante nulle, puis montrer que $\left(\int_0^1 f_n(x)dx\right)_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0,1\}}$ diverge.

3 Approximation

Exercice 13.

1. Sur $]-1,1[$, on considère la fonction $f : x\mapsto \frac{1}{x-1}$ et pour tout $n\in\mathbb{N}$ et tout $x\in]-1,1[$, on note $P_n(x)=\sum_{k=0}^n x^k$.

   Montrer que $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $[-a,a]$ pour tout $a\in]0,1[$.

2. Pour tout $n\in\mathbb{N}$ et tout $x\in\mathbb{R}$, on note $P_n(x)=\sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}$.

   En utilisant une formule de Taylor, montrer que $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f : x\mapsto \mathrm{e}^x$ sur tout segment $[a,b]$ de $\mathbb{R}$.

Exercice 14. On se propose de montrer que la fonction $f :]0,1[\to\mathbb{R}$, $x\mapsto \sin\frac{1}{x}$ n'est pas limite uniforme sur $]0,1]$ d'une suite d'applications polynomiales.

1. Supposons qu'il existe une telle suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Prouver qu'il existe $N\in\mathbb{N}$ tel que pour tout $k\in\mathbb{N}^*$
$$\left|P_N\left(\frac{1}{2k\pi-\frac{\pi}{2}}\right)+1\right|\leqslant\frac{1}{2},\quad \left|P_N\left(\frac{1}{2k\pi+\frac{\pi}{2}}\right)-1\right|\leqslant\frac{1}{2}.$$

2. En déduire que
$$P_N\left(\frac{1}{2k\pi-\frac{\pi}{2}}\right)\leqslant-\frac{1}{2}<0<\frac{1}{2}\leqslant P_N\left(\frac{1}{2k\pi+\frac{\pi}{2}}\right).$$

3. Montrer que pour tout $k\in\mathbb{N}^*$, il existe α_k vérifiant
$$\alpha_k\in\left]\frac{1}{2k\pi+\frac{\pi}{2}},\frac{1}{2k\pi-\frac{\pi}{2}}\right[$$
et tel que $P_N(\alpha_k)=0$.

4. Conclure.

Exercice 15. Sur $[0,1]$, on considère la fonction $f : x \mapsto \sqrt{x}$.
Soit $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de polynômes définis sur $[0,1]$ par

$$P_0 = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0,1],\ P_{n+1}(x) = P_n(x) + \frac{1}{2}\Big(x - (P_n(x))^2\Big).$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [0,1]$, $0 \leqslant P_n(x) \leqslant f(x)$.
2. Montrer que la suite de fonctions $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
3. En déduire que la suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $[0,1]$.

Exercice 16. Soit $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ une application continue. Montrer que

$$\int_a^b f(x)\mathrm{e}^{inx}dx \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$