Modélisation en probabilités - 2016/17 - O. Guédon, P.M. Samson UPEM

Feuille 1. Calcul intégral.

Exercice 1 – Primitives élémentaires. Pour chacune des fonctions suivantes, dire sur quel intervalle I les primitives sont bien définies. Et déterminer l'ensemble des primitives de f sur I.

$$1)f(x) = \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)^2, \quad 2)f(x) = x^\pi, \quad 3)f(x) = \sin x, \quad 4)f(x) = \frac{1}{2+x^2},$$

$$5)f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-5}}, \quad 6)f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad 7)f(x) = 2xe^{x^2}, \quad 8)f(x) = e^x\cos(e^x),$$

$$9)f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}\sqrt{1-x}}, \quad 10)f(x) = \frac{1}{x(1+\log^2 x)}, \quad 11)f(x) = \cos x \sin^2 x,$$

$$12)f(x) = \tan^3 x,\ 13)f(x) = \frac{1}{x\cos^2(\log x)},\ 14)f(x) = x\tan(x^2),\ 15)f(x) = \frac{\ln x}{x^n},$$

$$16)f(x) = \frac{x-1}{x+1}, \quad 17)f(x) = \frac{x^4-2x^2+2}{(x-1)^2}, \quad 18)f(x) = \frac{2x+3}{(x^2+3x+7)^m},\ m \in \mathbb{N}$$

Exercice 2 – Intégration par parties. Déterminer le domaine des fonctions F suivantes et les calculer.

$$\int_0^x t\sin t\ dt, \quad \int_0^x t^2 e^{-t}\ dt, \quad \int_1^x \frac{\log(1+t)}{t^2}dt, \quad \int_1^x \log(t)\ dt, \quad \int_1^x t^2\log(t)\ dt$$

$$\int_0^x e^{2t}\cos t\ dt, \quad \int_1^x \log^2(t)\ dt, \quad \int_0^x \arctan t\, dt, \quad \int_0^x \frac{3\arcsin t}{\sqrt{1-t^2}}\ dt$$

Exercice 3 – Changement de variables. Effectuer et justifier le changement de variables indiqué pour calculer l'intégrale.

$$\int_1^2 \frac{\cos(\log x)}{x}\ dx,\ u = \log x, \qquad \int_0^{\pi/2} \frac{3\sin x}{1+\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}\ dx,\ u = \cos x$$

$$\int_0^1 t^2\sqrt{1+t}\, dt,\ u = \sqrt{1+t}, \quad \int_0^1 \sqrt{1-t^2}\, dt,\ t = \sin u, \quad \int_0^1 \sqrt{1+t^2}\, dt,\ t = \operatorname{sh} u$$

Pour tout $t \in]-\pi,\pi[$, on pose $u = \tan(t/2)$. A l'aide des formules trigonométriques, exprimer $\sin t$, $\cos t$ et $\tan t$ en fonction de u. Calculer $\frac{du}{dt}$.

$$\int_0^{\pi/2} \cos^3 t(1+\sin^2 t)^2 dt,\ u = \sin t, \qquad \int_0^2 \frac{dt}{1+\cos t},\ u = \tan(t/2)$$

Exercice 4 – Fractions rationnelles. Déterminer les primitives de :

$$1)f(t) = \frac{1}{1-t^2}, \quad 2)f(t) = \frac{1}{1+t+t^2} \quad 3)f(t) = \frac{t+1}{1+t+t^2}$$

Exercice 5 – Observations.

1. Montrer que $\displaystyle\int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(a+b-t)dt$.
2. En déduire l'intégrale $\displaystyle\int_{\pi/6}^{\pi/3} \left(\sqrt{\cos t} - \sqrt{\sin t}\right) dt$.
3. Retrouver par cette méthode que si f est impaire alors $\displaystyle\int_{-a}^a f(t)dt = 0$.

Exercice 6 – Observations*.

1. Soit f une fonction périodique de période T. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\int_0^T f(t)dt = \int_x^{x+T} f(t)dt$. *(Faîtes un dessin avec $f(t) = \sin t$, $x = 5\pi/4$)*
2. Soit f une fonction continue dans $[0,\pi]$. Montrer, en utilisant un changement de variables, que l'on a
$$\int_0^\pi xf(\sin x)\ dx = \frac{\pi}{2}\int_0^\pi f(\sin x)\ dx.$$
En déduire la valeur de
$$\int_0^\pi \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\ dx.$$

Exercice 7 – Intégrales de Wallis. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^n\, dx.$$

1. Montrer que $(I_n)_n$ est positive décroissante. Que peut-on en conclure ?

2. Au moyen d'une intégration par parties, montrer que $I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n$.
3. On pose $u_n = I_{2n}$ et $v_n = I_{2n+1}$. Quelle relation lie u_{n+1} à u_n ? En déduire la valeur de u_n. Faire de même pour v_n et en conclure une formule pour I_n selon que n est pair ou impair.
4. Montrer que $I_n \sim I_{n+1}$. Simplifier $I_n\, I_{n+1}$. En conclure que $I_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$.
5. En déduire
$$\frac{1 \cdot 3 \cdots (2n+1)}{2 \cdot 4 \cdots (2n)} \sim 2\sqrt{\frac{n}{\pi}}.$$
6. À l'aide d'un changement de variable, calculer $\int_0^1 \left(1-t^2\right)^n dt$. En déduire
$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1} C_n^k$$

P.S. On peut utiliser les intégrales de Wallis pour déterminer une valeur approchée de $\pi/2$. Effectivement, à l'aide de la question 4, montrer que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^{4n+1}(n!)^4}{(2n)!(2n+1)!} = \pi.$$

Puis, montrer par récurrence que

$$\frac{2^{4n+1}(n!)^4}{(2n)!(2n+1)!} = 2\prod_{k=1}^{n} \frac{4k^2}{4k^2-1}.$$

Et on en conclut que

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} \frac{4k^2}{4k^2-1} := \prod_{k=1}^{\infty} \frac{4k^2}{4k^2-1}.$$

Exercice 8 – Inégalité de Cauchy Schwarz.

1. Soient f et g deux fonctions continues sur $[a,b]$ avec $a \leq b$. Montrer que
$$\lambda \mapsto \int_a^b (\lambda f(t) + g(t))^2 dt$$
est un polynôme de degré 2 à valeurs positives.
2. En déduire l'inégalité de Cauchy Schwarz
$$\left|\int_a^b f(t)g(t)dt\right| \leq \left(\int_a^b f^2(t)dt\right)^{1/2} \left(\int_a^b g^2(t)dt\right)^{1/2}.$$
3. Puis démontrer l'inégalité triangulaire
$$\left(\int_a^b (f(t)+g(t))^2 dt\right)^{1/2} \leq \left(\int_a^b f^2(t)dt\right)^{1/2} + \left(\int_a^b g^2(t)dt\right)^{1/2}$$