Université Paris-Est Marne la-Vallée
S4 MI-MASS 2016-2017

Topologie en dimension 2
TD 2

<u>Exercice 1</u> :
Soit A une partie d'un espace métrique (E, d).
a) Montrer que $\overline{A}$ (adhérence de A) est un fermé de E.
b) Montrer que si F est un fermé de E contenant A, on a $\overline{A} \subseteq F$.
L'adhérence de A est ainsi le plus petit fermé contenant A.
c) Montrer que pour toutes parties A et B de (E, d) :
$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ et que $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$ (Montrer à l'aide d'un exemple que l'inclusion réciproque est fausse).

<u>Exercice 2</u> :
Déterminer l'adhérence des parties suivantes :
1) Dans $\mathbb{R}$: *a)* $[0, +\infty[$ *b)* $]1, 2]$ *c)* $]2, +\infty[$ *d)* $\mathbb{Z}$ *e)* $\mathbb{Q}$ *f)* $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$
2) Dans $\mathbb{R}^2$:
$A_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ x + y = 1\}$ $A_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ y > x^2\}$
$A_3 = \{(\frac{1}{n}, 1) \ ; \ n \in \mathbb{N}^*\}$ $A_4 = \{(\frac{1}{n}, n) \ ; \ n \in \mathbb{N}^*\}$.

<u>Exercice 3</u> :
Dans $\mathbb{R}^2$ déterminer l'adhérence d'une boule ouverte.

<u>Exercice 4</u> :
On appelle frontière d'une partie A d'un espace métrique (E, d) l'ensemble noté $\partial A = \overline{A} \cap \overline{A^c}$.
1) Montrer que ∂A est un fermé.
2) Soit $E = \mathbb{R}$. Déterminer la frontière de $[0, 1[$, de $\mathbb{R}_+$, de $\mathbb{N}$, de $\mathbb{Q}$.
3) Soit $E = \mathbb{R}^2$.
Déterminer la frontière des ensembles A_1 et A_2 de l'exercice 3. 2).
4) Soit $E = \mathbb{R}^2$. Déterminer la frontière d'une boule.

<u>Exercice 5</u> :
Montrer que dans un espace métrique, toute suite convergente est bornée.

<u>Exercice 6</u> :
Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^2$:

$$u_n = \left(\frac{\sin(n)}{n}, n \ln(1 + \frac{1}{n}) \right)$$

<u>Exercice 7</u> :
La fonction $(x,y) \longmapsto \sin\left(\dfrac{1}{xy}\right)$ a-t-elle une limite en $(0,0)$?

<u>Exercice 8</u> :
A) Soit $\mathcal{D}$ le domaine de définition de la fonction de deux variables réelles définie par : $f(x,y) = \dfrac{xy\ln(xy)}{x+y}$.
1) Déterminer et représenter graphiquement $\mathcal{D}$.
2) En quels points de $\overline{\mathcal{D}}$ la fonction f admet-elle une limite finie ?
B) Mêmes questions pour la fonction $g : (x,y) \longmapsto g(x,y) = \dfrac{y}{\sqrt{y-x^2}}$.

<u>Exercice 9</u> :
a) Montrer que la réunion de deux parties compactes de $\mathbb{R}^2$ est un compact.
b) Montrer qu'une partie finie de $\mathbb{R}^2$ est compacte.

<u>Exercice 10</u> :
Soit f une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$ et $f(0) > 0$.
Montrer que f est bornée et atteint son maximum.
Montrer par un exemple que f peut ne pas atteindre sa borne inférieure.

<u>Exercice 11</u> : (Partiel avril 2016)
Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que : $\lim\limits_{\|(x,y)\|\to\infty} f(x,y) = 0$
et $a = f(x_0, y_0) > 0$ en un point (x_0, y_0) de $\mathbb{R}^2$.
$\|\cdot\|$ désigne une norme quelconque sur $\mathbb{R}^2$.
Soit $K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : f(x,y) \geq a\}$
1) Justifier qu'il existe $R > 0$ tel que si $\|(x,y)\| > R$ alors $|f(x,y)| < a$.
En déduire que K est borné.
2) Montrer que K est compact.
3) Justifier que f est majorée sur K puis sur $\mathbb{R}^2$ et qu'elle atteint son sup sur $\mathbb{R}^2$.

<u>Exercice 12</u> : (Partiel mars 2010) :
Soit (E,d) un espace métrique <u>compact</u>.
A) Montrer que $\forall (x,y,z) \in E^3 \quad |d(x,z) - d(y,z)| \leq d(x,y)$.
En déduire que pour z fixé, l'application $u \longmapsto d(u,z)$ est continue sur E.
B) Soit $f : E \longrightarrow E$ une application vérifiant :

$$\forall (x,y) \in E^2 \quad (x \neq y) \Longrightarrow (d(f(x), f(y)) < d(x,y))$$

1) Montrer que f est continue en tout point de E.
2) Soit $\varphi : E \longrightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par :

$$\forall x \in E \quad \varphi(x) = d(x, f(x))$$

a) Montrer que φ est continue en tout point de E.
(on décomposera judicieusement $\varphi(x) - \varphi(y)$)
b) Montrer que $\inf\limits_{x \in E} \varphi(x)$ est atteint.
c) Soit $c = \inf\limits_{x \in E} \varphi(x)$ et $x_0 \in E$ tel que $c = \varphi(x_0)$.
Montrer que $c = 0$.
(on supposera, par l'absurde, que $c > 0$ et on considérera le point $f(x_0)$)
3)
a) Montrer que f admet un point fixe, i.e. un point $a \in E$ tel que $f(a) = a$.
b) Montrer que ce point fixe est unique.

<u>Exercice 13</u> : Dans $\mathbb{R}^2$, toutes les normes sont toutes équivalentes.
Soit $E = \mathbb{R}^2$ et $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ une base de E.
On définit sur E la norme N_∞ : $\forall x \in E \quad (x = x_1 e_1 + x_2 e_2$ sur la base $\mathcal{B})$

$$N_\infty(x) = \{|x_1|, |x_2|\}$$

Dans cet exercice, nous allons montrer que si N et N' sont deux normes quelconques définies sur E, alors il existe $c, c' > 0$ tels que

$$\forall x \in E \quad cN(x) \leq N'(x) \leq c' N(x)$$

1) Montrer qu'il suffit de traiter le cas où $N = N_\infty$.
2) Montrer que si N' est une norme sur E, alors, pour tout $x \in E$:

$$N'(x) \leq \left(\sum_{i=1}^{2} N'(e_i) \right) N_\infty(x).$$

En déduire que la fonction $N' : (E, N_\infty) \to \mathbb{R}_+$ est continue.
3) Justifier que $S_\infty = \{x \in E : N_\infty(x) = 1\}$ est un compact de (E, N_∞).
4) En déduire qu'il existe $c > 0$ tel que

$$\forall x \in E \quad cN_\infty(x) \leq N'(x)$$