Modélisation en probabilités - 2016/17 - O. Guédon, P.M. Samson UPEM

Feuille 2. Intégrales généralisées.

Exercice 1 – Nature des intégrales. Étudier la convergence des intégrales :

$$\int_0^{+\infty} x^{-n}e^{-1/x}dx, \qquad \int_0^{+\infty}\cos(e^x)dx, \qquad \int_0^1 \cos(\log x)dx,$$
$$\int_0^{+\infty} x^\alpha(1-e^{-1/\sqrt{x}})dx, \qquad \int_2^{+\infty}\frac{dx}{\sqrt{x}(\log x)^4}, \qquad \int_2^{+\infty}\frac{dx}{x^2\sqrt{\log x}},$$
$$\int_0^a \frac{dx}{x^\alpha\mid\log x\mid^\beta} \text{ avec } a<1, \qquad \int_b^{+\infty}\frac{dx}{x^\alpha(\log x)^\beta} \text{ avec } b>1,$$
$$\int_0^{+\infty}\frac{(1-e^{\alpha x})e^{-\beta x}}{x^\gamma}dx, \qquad \int_0^{+\infty}\frac{\sqrt{x}\sin(1/x^2)}{\log(1+x)}dx.$$

Exercice 2 –
a) Pour quelles valeurs de $n\in\mathbb{R}$, l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+1)^n}$$

est-elle convergente ? On appellera I_n sa valeur.
b) Etablir une relation de récurrence entre I_n et I_{n+1}, en déduire I_n.
c) Exprimer $J_n=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+2px+q)^n}$ en fonction de I_n pour p et q tels que $q-p^2>0$. En déduire J_n.

Exercice 3 –
a) On définit I_α et J_α par :

$$I_\alpha=\int_{2\pi}^{+\infty}\frac{\sin x}{x^\alpha}dx, \qquad J_\alpha=\int_{2\pi}^{+\infty}\frac{\cos x}{x^\alpha}dx.$$

Montrer que I_α et J_α sont absolument convergentes pour $\alpha>1$.
b) Montrer que I_α et J_α convergent pour $0<\alpha\le 1$.
c) Que peut-on dire des intégrales

$$A_\lambda=\int_0^{+\infty}\sin(x^\lambda)dx, \qquad B_\lambda=\int_0^{+\infty}\cos(x^\lambda)dx$$

lorsque $\lambda>1$.
d) Montrer que I_α et J_α divergent pour $\alpha<0$. On pourra considérer les suites $u_n=\int_{2\pi}^{n\pi}\frac{\sin x}{x^\alpha}dx$ et $v_n=\int_{2\pi}^{n\pi}\frac{\cos x}{x^\alpha}dx$.

Exercice 4 – Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, continue.
a) On suppose que f est bornée, calculer :

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty}e^{-nt}f(t)dt.$$

b) Même question en supposant :

$$\exists\alpha\in\mathbb{R},\exists A\in\mathbb{R}_+,\forall t\ge A, \mid f(t)\mid\le e^{\alpha t}$$

c) Montrer en supposant f bornée, que :

$$\lim_{n\to+\infty} n\int_0^{+\infty}e^{-nt}f(t)dt=f(0).$$

Exercice 5 – Soit f une fonction définie sur $[1,+\infty[$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ décroissante, ayant une limite l en $+\infty$ et telle que $\int_1^{+\infty}f(x)dx$ diverge.
a) On pose $S_n=\sum_{p=1}^n f(p)$. Montrer que :

$$\int_1^{n+1}f(x)dx\le S_n\le f(1)+\int_1^n f(x)dx.$$

b) On pose $F(n)=\int_1^n f(x)dx$. Montrer que :

$$\lim_{n\to+\infty}F(n)=+\text{ ou }-\infty,$$

selon les valeurs de l.
c) Montrer que la suite $U_n=S_n-F(n)$ est décroissante minorée et que $l\le U_n\le f(1)$. En déduire que S_n et $F(n)$ sont équivalentes lorsque n tend vers l'infini.
d) Application : montrer que $\gamma=\lim_{+\infty}(\sum_{p=1}^n 1/p-\log n)$ existe et que $0\le\gamma\le 1$.