Université Paris-Est Marne la-Vallée
S4 MI-MASS 2016-2017
Topologie en dimension 2

TD 3

Exercice 1 :
Etudier l'existence d'un prolongement par continuité en $(0,0)$ pour les fonctions suivantes :

$$f_1(x,y) = \frac{(x+y)^2}{x^2+y^2} \quad f_2(x,y) = \frac{e^{xy}-1}{x^2+y^2}$$
$$f_3(x,y) = (x^2+y^2)\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) \quad f_4(x,y) = \frac{\sin x + \sin y}{\sqrt{|x|}+\sqrt{|y|}}$$
$$f_5(x,y) = e^{x\ln(x^2+y^2)} \quad f_6(x,y) = \frac{xy}{|x|+|y|}$$

Exercice 2 :
Les fonctions suivantes sont-elles continues sur $\mathbb{R}^2$?

$$f(x,y) = \begin{cases} y^2\sin(\dfrac{x}{y}) & \text{si} \quad y \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \qquad g(x,y) = \begin{cases} xy\ln\left|\dfrac{x}{y}\right| & \text{si} \quad x \neq 0 \ et\ y \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$
$$h(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y}{x^2}e^{-\frac{y}{x^2}} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases} \qquad k(x,y) = \begin{cases} \dfrac{e^x - e^y}{x-y} & \text{si} \quad x \neq y \\ e^x & \text{si} \quad x = y \end{cases}$$

Exercice 3 :
Montrer que la fonction $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x,y) = \begin{cases} \exp(x\ln(x^2+y^2)) \text{ si } (x,y) \neq (0,0) \\ 1 \text{ si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

est continue en $(0,0)$ et étudier l'existence de dérivées partielles en $(0,0)$.
La fonction $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ est-elle continue en $(0,0)$?

Exercice 4 :
On considère l'application f définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$\begin{cases} f(x,y) = \dfrac{x^2 \sin x \cos y}{x^2+y^2} \ si\ (x,y) \neq (0,0) \\ f(0,0) = 0 \end{cases}$$

1) Justifier la continuité de f sur $\mathbb{R}^2$, et en particulier en $(0,0)$.
2) Calculer les dérivées partielles de f en $(0,0)$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.

3) Calculer, pour $(x,y) \neq (0,0)$, la dérivée partielle $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$

4) En déduire la valeur de $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,x)$.

La fonction f est-elle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$?

Exercice 5 :

On considère l'ouvert $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ y \neq 0\}$ de $\mathbb{R}^2$ et la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = y \exp\left(-\dfrac{x^2}{y^2}\right)$ pour $(x,y) \in \Omega$ et $f(x,y) = 0$ pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2 - \Omega$.

1) Justifier la continuité de f sur $\mathbb{R}^2$.

2) Calculer les dérivées partielles $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ en tout point de Ω.

3) Etudier, selon x_0, l'existence et la valeur éventuelle de $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, 0)$.

4) La fonction f est-elle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$?

Exercice 6 :

On considère l'ouvert $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ y \neq 0\}$ de $\mathbb{R}^2$ et la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = y^2 \sin\left(\dfrac{x}{y}\right)$ pour $(x,y) \in \Omega$ et $f(x,y) = 0$ pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2 - \Omega$.

1) Etudier la continuité de f sur $\mathbb{R}^2$ et calculer les dérivées partielles $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ en tout point de Ω.

2) Etablir l'existence de ces dérivées partielles en un point quelconque $(x_0, 0)$ de $\mathbb{R}^2 - \Omega$.

3) Etudier la continuité de $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ sur $\mathbb{R}^2 - \Omega$.

Exercice 7 :

Soit g une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Montrer que la fonction $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = g(x-y)$ est solution de l'équation aux dérivées partielles : $\dfrac{\partial f}{\partial x} + \dfrac{\partial f}{\partial y} = 0$.

Réciproquement, montrer que si $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ est une solutions de classe $\mathcal{C}^1$ de cette équation, il existe une fonctin g, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, telle que f soit donnée par $f(x,y) = g(x-y)$.

On étudiera la fonction $x \longmapsto f(x, x+a)$ où $a \in \mathbb{R}$.

Déterminer toutes les fonctions f de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$, solutions de l'équation aux dérivées partielles $a\dfrac{\partial f}{\partial x} + b\dfrac{\partial f}{\partial y} = 0$ où a et b sont des réels non nuls.

Exercice 8 :
En utilisant le changement de coordonnées de variables en polaires, résoudre l'équation :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad x\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) - y\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0$$

où f est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}^2$ vers $\mathbb{R}$.

Exercice 9 :
Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ vérifiant :

$$\forall \lambda > 0 \;\; \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\; f(\lambda x, \lambda y) = \lambda f(x,y). \quad (*)$$

1. En calculant les dérivées partielles des deux membres de l'égalité $(*)$ montrer que : $\forall \lambda > 0 \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(\lambda x, \lambda y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y), \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(\lambda x, \lambda y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y).$$

2. On note $a = \dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ et $b = \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.

   Etablir que $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\; \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = a$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = b$.

3. En déduire que $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\; f(x,y) = ax + by$.

Exercice 10 :
Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.
Pour $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, on pose pour tout (h,k) :

$$Q_{(x_0,y_0)}(h,k) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0)h^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0,y_0)hk + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0)k^2$$

a) On pose, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $g(t) = f(x_0 + th, y_0 + tk)$.
Etablir que g est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$
b) Exprimer $g'(t)$ et $g''(t)$ en fonction des dérivées partielles d'ordre 1 et 2 de f.
Donner alors le développement limité d'ordre 2 de g en 0.
c) En déduire que :

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + th, y_0 + tk) + f(x_0 - th, y_0 - tk) - 2f(x_0,y_0)}{t^2} = Q_{(x_0,y_0)}(h,k)$$