**Modélisation en probabilités - 2016/17 - O. Guédon, P.M. Samson UPEM**

Feuille 2. Intégrales multiples.

**Exercice 1** – Calculer les intégrales doubles suivantes :

a) $\iint_D xy \mathrm{d}x\mathrm{d}y$ où $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 1\}$

b) $\iint_D \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(1+x+y)^2}$ où $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1\}$

c) $\iint_D 2y \mathrm{d}x\mathrm{d}y$ où $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 < x\right\}$

d) $\iint_D \min(x,y) \mathrm{d}x\mathrm{d}y$ où $D = [0,1] \times [0,1]$

**Exercice 2** – Calculer $\iint_D dxdy$ et $\iint_D xdxdy$ où

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \leq 1\},$$

en coordonnées cartésiennes puis en coordonnées polaires.

**Exercice 3** – Soit $D$ le domaine défini par $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \leq x\}$.

1. Dessiner $D$.
2. En utilisant les coordonnées polaires, calculer l'intégrale

$$I = \iint_D xy \, dxdy.$$

**Exercice 4** – Calculer les intégrales doubles suivantes (en passant en coordonnées polaires) :

a) $\iint_D \frac{1}{1+x^2+y^2} \mathrm{d}x\mathrm{d}y$ où $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \leq 1\}$

b) $\iint_D \frac{1}{(x^2+y^2)^2} \mathrm{d}x\mathrm{d}y$ où $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x, x^2 + y^2 \geq 1\}$.

**Exercice 5** – a) Calculer l'aire intérieure de l'ellipse d'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. On pourra faire le changement de variable $x = ar\cos(u)$, $y = br\sin(u)$.

b) Calculer l'intégrale double suivante :

$$\iint_D (x^2 + y^2) \mathrm{d}x\mathrm{d}y \text{ où } D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1\}.$$

**Exercice 6** – On pose $D_R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq R^2\}$ et on considère l' intégrale

$$I_R = \iint_{D_R} e^{-x^2-y^2} dxdy.$$

1. Calculer $I_R$.
2. En déduire la valeur de $\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2} dxdy$, puis celle de $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx$.

**Exercice 7** – Soit $p > 0$, et $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; y^2 - 2px \leq 0, x^2 - 2py \leq 0\}$. Calculer,

$$\iint_D e^{-\left(\frac{x^3+y^3}{xy}\right)} \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

en utilisant le changement de variable $x = u^2v$, $y = uv^2$.

**Exercice 8** – Calculer $\iint_D (x+y)^2 e^{x^2-y^2} \mathrm{d}x\mathrm{d}y$ où $D = \{(x,y) \mid x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1\}$ en utilisant $u = x + y$, $v = x - y$.

**Exercice 9** – Soit $V$ le domaine défini par $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x + y + z \leq 1\}$.

1. Dessiner $V$.
2. Calculer le volume de $V$.
3. Calculer $\iiint_V (x+y) \, dxdydz$.

**Exercice 10** – Déterminer le volume de la boule unité $B$ en dimension 3 :

$$B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$$

(passer en coordonnées sphériques).

**Exercice 11** – Calculer

$$I = \iiint_D \frac{z^3}{(y+z)(x+y+z)} \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

où $D = \{(x,y,z) \mid x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x + y + z \leq 1\}$ (indication : on effectuera le changement de variable $u = x + y + z$, $v = y + z$, $w = z$).

**Exercice 12** – Calculer les intégrales triples suivantes :

a) $\iiint_D xz\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ pour $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; x \geq y^2, z \geq 0, y \geq 0, x+z \leq 1\}$

b) $\iiint_D x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ pour $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; x^2+y^2+z^2 \leq a^2\}$ (passer en coordonnées sphériques)

c) $\iiint_D (x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ pour $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; x^2+y^2 \leq 1; 0 \leq z \leq 1\}$ (passer en coordonnées cylindriques)

d) $\iiint_D (x+y)(x^2+y^2)dxdydz$, où $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; 1 \leq x^2+y^2 \leq 4, x \geq 0, y \geq 0, 0 \leq z \leq 1\}$ (utiliser les coordonnées cylindriques).