Modélisation en probabilités - 2016/17 - O. Guédon, P.M. Samson UPEM

Feuille 4. Modélisation en probabilité.

Exercice 1 – On tire une carte d'un jeu de 32. On considère les évènements :
— A : la carte tirée est le valet de coeur
— B : la carte tirée est un coeur
— C : la carte tirée est une figure de pique (valet, dame, roi) ou un coeur
Décrire l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ associé à cette expérience. Calculer $P(A)$, $P(B)$, $P(C)$, $P(A \,\text{et}\, B)$, $P(C \,\text{et}\, B)$, $P(A \,\text{et}\, C)$, $P(A \,\text{ou}\, B)$, $P(C \,\text{ou}\, B)$, $P(A \,\text{ou}\, C)$ et $P(A \,\text{et}\, B \,\text{et}\, C)$.

Exercice 2 – **Modélisation élémentaire**

1. Une urne contient autant de boules noires que de blanches. On fait deux tirages successifs avec remise. Soit Y le nombre de boules noires obtenu.
   (a) Quelle modélisation adopter ?
   (b) Déterminer $P(\text{“}Y = 1''), P(\text{“}Y = 2''), P(\text{“}Y = 0'')$.
2. L'urne contient maintenant une proportion p_0 de boules noires et p_1 de blanches, $p_0 + p_1 = 1$. On effectue la même expérience aléatoire.
   (a) Déterminer $P(\text{“}Y = 2'')$.
   (b) Pourquoi multiplier p_0 par p_0 ? Nous allons justifier cette multiplication en choisissant dans la question suivante une autre modélisation.
3. Autre écriture du problème : L'urne contient maintenant N_0 boules noires et N_1 blanches. On pose $N = N_0 + N_1$, on a alors $p_0 = N_0/N$ et $p_1 = N_1/N$. On effectue la même expérience aléatoire. Déterminer $P(\text{“}Y = 2'')$.

Exercice 3 – **Loi binômiale** On rappelle que la loi binômiale $B(n, p)$ est par définition la loi du nombre de boules noires obtenu lors de n tirages **avec remise** dans une urne contenant une proportion p de boules noires. Notons Y le nombre de boules noires obtenu. On cherche à déterminer $P(\text{“}Y = k'')$.

1. Première modélisation : On considére l'ensemble des résultats suivants :
$$\Omega = \{(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n) \in \{B, N\}^n\}$$
   (a) Quelle est la probabilité d'un événement élémentaire ?
   (b) En déduire $P(\text{“}Y = k'')$, pour $k \in \{0, \dots, n\}$.
2. Seconde modélisation : L'urne contient N_0 boules noires parmi N boules. On effectue n tirages avec remise. Les boules sont toutes distinguables et portent un numéro, les N_0 premières sont noires. On considére l'ensemble des résultats suivants :
$$\Omega = \{(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n) \in \{1, 2, \dots, N_0, N_0 + 1, \dots N\}^n\}$$
   (a) Déterminer la probabilité d'un événement élémentaire.
   (b) En déduire $P(\text{“}Y = k'')$, pour $k \in \{0, \dots, n\}$. Exprimer cette probabilité en fonction de $p_0 = N_0/N$.

Exercice 4 – **Loi hypergéométrique** On rappelle que la loi hypergéométrique $H(n, N_0, N)$ de paramètres $n \leq N_0 \leq N$ est par définition la loi du nombre de boules noires récoltées, lors de n tirages **sans remise**, dans une urne contenant N boules dont N_0 boules noires. Notons Y le nombre de boules noires obtenu. On cherche à déterminer $P(\text{“}Y = k'')$.

1. Première modélisation : On considére l'ensemble des résultats suivants :
$$\Omega = \{\{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\} \subset \{1, \dots, N\}\}$$
   (a) Y-a-t'il équiprobabilité ?
   (b) Quel est le cardinal de Ω ?
   (c) Expliquez pourquoi $\mathbb{P}(Y = k) = \dfrac{\binom{N_0}{k}\binom{N-N_0}{n-k}}{\binom{N}{n}}$.
2. Seconde modélisation : Les N boules sont toutes distinguables et portent un numéro. Les boules numérotées de 1 à N_0 sont noires. On tire jusqu'à épuisement les N boules de l'urne. L'ensemble des résultats de l'expérience est :
$$\Omega = \left\{(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_N) \subset \{1, \dots, N\}^N, \omega_i \neq \omega_j, \forall i \neq j\right\}.$$
   (a) Y-a-t'il équiprobabilité ?
   (b) Quel est le cardinal de Ω ?
   (c) Y représente toujours le nombre de boules noires obtenu après les n premiers tirages ($1 \leq n \leq N_0$). Déterminer $\mathbb{P}(Y = 0), \mathbb{P}(Y = 1)$ puis $\mathbb{P}(Y = k), k \in \{0, \dots, n\}$.

Exercice 5 – On tire deux cartes d'un jeu de 52 cartes. Quelle est la probabilité qu'elles aient la même couleur ? Même question en supposant qu'on tire les deux cartes successivement en remettant la première dans le paquet (tirage avec remise).

Exercice 6 – On lance deux dés equilibrés (notés A et B) :

1. Préciser l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ associé.
2. Calculer la probabilité pour que le dé A fasse 1 et le dé B fasse 2 .
3. Calculer la probabilité pour qu'on obtienne le résultat $1, 2$ (sans distinguer les dés).
4. Calculer la probabilité pour qu'on obtienne un double 2 (c'est à dire que les deux dés fassent 2).
5. Calculer la probabilité pour que les deux dés fassent le même numéro.
6. Calculer la probabilité pour que les deux dés fassent un numéro différent.

Exercice 7 – Problème du Chevalier de Méré (1607-1684). Est-il plus facile d'obtenir au moins un double six en 24 lancers de deux dés ou un six en quatre lancers d'un seul dé ?

Exercice 8 – Une firme pharmaceutique met au point un test pour détecter une maladie, on sait que cette maladie touche 2 % de la population. On effectue ce test sur un échantillon de malades et on constate que 95 % sont positifs. On effectue le test sur un échantillon de non-malades et on constate que 1 % sont positifs. Pour savoir si le test est fiable, calculer la probabilité d'être madade, si le test est positif.

Exercice 9 – Un examen comporte 15 questions, chacune admettant 3 réponses possibles. Les étudiants répondent à chaque question indépendamment ; on suppose que les étudiants ayant préparé l'examen sont en proportion de 70 % et répondent correctement à une question avec une probabilité de 0.8, les 30% d'étudiants restant choisissant les réponses au hazard. Il faut au moins huit bonnes réponses pour réussir l'examen.

1. Si un étudiant échoue quelle est la probabilité qu'il ait préparé l'examen.
2. Soit M le nombre moyen de bonnes réponses pour un étudiant ayant préparé l'examen. Si un étudiant obtient cette note M, quelle est la probabilité qu'il n'ait pas préparé l'examen ?

Exercice 10 – Dans une assemblée de n personnes, quelle est la probabilité p_n que deux personnes au moins aient leur anniversaire le même jour ? Faire le calcul pour $n = 10$, 20, 30, 50. A partir de quelle valeur de n cette probabilité dépasse-t-elle $1/2$? On évaluera d'abord la probabilité qu'aucun anniversaire ne tombe le même jour.

Exercice 11 – Une personne à dans sa poche n clés, dont celle de son bureau. Elle essaie les clés au hasard, une à une, pour ouvrir la porte de son bureau. Quelle est la probabilité que cette personne tire la bonne clé au k-ième essai ? (On suppose qu'elle élimine les clés déjà essayées.)

Exercice 12 – Une loterie comporte 100 billets, parmi lesquels : 1 billet gagnant de 10000 euros, 5 billets gagnants chacun 3000 euros et 10 billets gagnant chacun 1000 euros.

(a) Donner la probabilité de gagner 3000 euros en achetant 3 billets.

(b) Donner la probabilité de gagner au moins 3000 euros en achetant 3 billets.

Exercice 13 – Une classe comporte 10 garçons dont la moitié a les yeux marron et 20 filles dont la moitié également a les yeux marron. Calculez la probabilité pour qu'une personne tirée au hasard dans cette classe soit un garçon ou ait les yeux marron.

Exercice 14 – **Tirage avec ou sans remise**

(a) On tire successivement une carte de chacun de deux jeux de 52 cartes. Quelle est la probabilité de sortir au moins un as ?

(b) On tire deux cartes d'un même jeu de 52 cartes. Quelle est la probabilité de sortir au moins un as ? On envisagera deux cas :

1. la seconde carte est tirée après remise en jeu de la première,
2. les deux cartes sont tirées simultanément.

Exercice 15 – On considère une population de N individus. On effectue n prélèvements successifs avec remise de cette population. La suite des prélèvements constitue un résultat. Quelle est la probabilité des événements suivants ?

1. Un individu X est prélevé k fois ($k \le n$).
2. X est prélevé m fois au cours des r premiers tirages ($m \le r \le n$).
3. X est prélevé pour la s-ième fois au t-ième tirage ($1 \le s \le t \le n$).

Exercice 16 – Un groupe de n personnes, dont A et B, se répartit au hasard dans une rangée de n fauteuils. Quelle est la probabilité qu'il y ait exactement k personnes entre A et B ?