Modélisation en probabilités - 2016/17 - O. Guédon, P.M. Samson UPEM

Feuille 5. Variables aléatoires réelles.

Exercice 1 – Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < -1 \text{ ou } x > 1, \\ x+1, & \text{si } -1 \leq x \leq 0, \\ -x+1, & \text{si } 0 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

1. Montrer que f est une densité de probabilité.
2. Soit X une variable aléatoire réelle de densité f. Déterminer $P(|X| > 0,5)$.

Exercice 2 – Soit X une v.a.r. de densité de probabilité

$$f(x) = kx1_{[0,5]}(x).$$

1. Calculer k.
2. Calculer : $P(1 \leq X \leq 3)$, $P(X \leq 4)$.

Exercice 3 – Soit X une v.a.r. suivant une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.

1. Pour $t, s > 0$, calculer $P(X > s)$, puis $P(X > t+s | X > t)$.
2. Si X représente la durée de vie d'un composant électronique, comment peut-on interpréter cette propriété ?
3. Réciproquement, montrer que cette propriété est caractéristique de la loi exponentielle. (On dit que la loi exponentielle est "sans mémoire").

Exercice 4 – Soit X une v.a.r. de densité

$$f(x) = e^{-x}1_{[0,\infty)}(x).$$

Déterminer la densité et la fonction de répartition de X^2. Même question pour $2X+1$.

Exercice 5 – Soit U une v.a.r. uniformément répartie sur $[0,5]$. Quelle est la probabilité que les racines de l'équation $4x^2 + 4xU + U + 4 = 0$ soient réelles ?

Exercice 6 – Soit $U \sim \mathcal{U}(0,1)$ et soit $\lambda > 0$. Déterminer la fonction de répartition de $X = -(\ln U)/\lambda$.

Exercice 7 – Soient X et Y deux v.a.r. indépendantes suivant la loi uniforme sur $[0,1]$. Déterminer la fonction de répartition de $M = \max(X,Y)$ et de $m = \min(X,Y)$. Même question lorsque X et Y suivent des lois exponentielles de paramètres respectifs λ et μ.

Exercice 8 – La densité de probabilité pour la loi de la durée de vie X d'un composant électronique est $f(x) = 10x^{-2}1_{(10,+\infty)}(x)$. Calculer $P(X > 15)$, puis la probabilité que sur six composants trois au moins fonctionnent plus de 15 heures. Quelles hypothèses faites-vous ?

Exercice 9 – Déterminer une médiane de la variable X, lorsque X suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$, lorsque X suit une loi normale $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$.

Exercice 10 – Soit X de loi normale $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$

1. Si $\sigma^2 = 4$ et $P(X > 2) = 0,5$, déterminer m.
2. Si $m = -2,5$ et $P(X < 0) = 0,95$, déterminer σ^2. Le quantile d'ordre 95% d'une loi normale centrée réduite vaut $1,64$.

Exercice 11 – Soit X une variable aléatoire positive admettant pour densité

$$f(x) = \begin{cases} 6x(1-x) & si \quad x \in [0,1] \\ 0 \quad sinon. \end{cases}$$

1. Calculer $E(X)$ puis $V(X)$.
2. On pose $Y = X + 1$. Calculer $E(Y)$ puis $V(Y)$.

Exercice 12 – Soit X une variable aléatoire admettant pour densité

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{2}x^2 & \text{si} \quad x \in [-1,1] \\ 0 \quad sinon. \end{cases}$$

Calculer $E(X)$ puis $V(X)$.

Exercice 13 – Soit f la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} xe^{-\frac{x^2}{2}} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Montrer que f est une densité de probabilité.

2. Soit X une variable aléatoire de densité f.
   (a) Calculer $P(X > 1)$.
   (b) Calculer $E(X)$
   (c) Déterminer la fonction de répartition de $Y = X^2$.

Exercice 14 – La citerne à essence d'une station-service est remplie chaque lundi matin. La vente hebdomadaire d'essence – en milliers de litres – réalisée par la station-service est une variable aléatoire X de densité

$$f(x) = 5(1-x)^4 1_{[0,1]}(x).$$

1. Calculer la vente moyenne hebdomadaire d'essence réalisée par la station-service.
2. Déterminer la fonction de répartition de X.
3. Quelle doit être la capacité minimale de la citerne pour que la probabilité que la station soit à cours d'essence, au courant d'une semaine donnée, soit inférieure à $0,01$?
4. Une fois les taxes et les coûts fixes de paiement des employés prélevés, la recette hebdomadaire pour la station service (exprimée en Euros) est de la forme $Y = aX - b$, avec $a > 0$ et $b > 0$. Déterminer la fonction de répartition puis une densité de Y. Pour $a = 10b$, quelle est la probabilité que la recette hebdomadaire dépasse b/9 Euros ?

Exercice 15 – Une caserne de pompiers doit être construite sur une route de longueur A, avec $A \in]0, +\infty[$. Si un incendie se déclare en des points uniformément distribués entre 0 et A, où doit être située la caserne pour minimiser l'espérance de la distance jusqu'au feu ? Autrement dit, déterminer a tel que $E(|X - a|)$ soit minimale lorsque X est uniformément distribuée sur $[0, A]$.

On suppose maintenant que la route est de longueur infinie. Si la distance d'un incendie au point 0 est distribuée selon une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$, où doit se trouver la caserne ?

Exercice 16 – **Consommation d'eau.** La consommation journalière en eau d'une agglomération au cours du mois de juillet est une variable aléatoire X dont la densité f a la forme :

$$f(t) = c(t-a)(b-t)1_{[a,b]}(t), t \in \mathbb{R},$$

où $a,\ b,\ c$ sont des constantes strictement positives (a ¡ b).

1. Vérifier que l'on a pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$$\int_a^b (t-a)^n (b-t)dt = \frac{(b-a)^{n+2}}{(n+1)(n+2)}.$$
2. Exprimer la constante c en fonction de a et b.
3. Calculer $E(X-a)$ et $E[(X-a)^2]$. En déduire $E(X)$ et $V(X)$.
4. Donner la fonction de répartition F de la variable aléatoire X. Donner l'allure des représentations graphiques de f et F. Proposer une interprétation physique des constantes a et b.
5. En notant X_i la consommation du i-ème jour et en supposant que les X_i sont indépendantes et de même loi que X, exprimer l'aide de F et de n la fonction de répartition de la variable aléatoire $M_n = \max_{1 \leq i \leq n} X_i$. Indication : On commencera par écrire l'événement $\{M_n \leq x\}$ en fonction des événements $\{X_i \leq x\}$.
6. En fait la ville est alimentée en eau par un canal qui peut fournir au maximum une quantité journalière d'eau $x_0 = a + 0.9(b-a)$ et par un réservoir de sécurité dans lequel elle peut puiser en cas de trop forte demande. Calculer numériquement la probabilité qu'au cours des 31 jours du mois de juillet, on ne fasse jamais usage du réservoir de sécurité (le résultat ne dépend ni de a ni de b).

Exercice 17 – Soit X de loi normale centrée réduite.
1. Déterminer $E(X^{2n+1})$ et $E(X^{2n})$, pour $n \in \mathbb{N}$.
2. En effectuant le changement de variables $t = x + u$ dans l'écriture intégrale de $P(X \geq x)$, montrer que pour tout $x \geq 0$, on a
$$P(X \geq x) \leq \frac{1}{2} e^{-x^2/2}.$$

Exercice 18 – Soit X une variable de densité $f(x) = \frac{1}{4}(1 + 3x^2)1_{[-1,1]}(x)$. En utilisant l'inégalité de Tchebychev, déterminer un intervalle de la forme $[-a, a]$, contenant X avec une probabilité supérieure à 0,75.