Modélisation en probabilités - 2016/17 - O. Guédon, P.M. Samson UPEM

Feuille 6. Vecteurs aléatoires.

Exercice 1 – S oit (X,Y) un couple de v.a. indépendantes de loi uniforme sur $[0,1]$.

1. Calculer $P(X \leq Y^2)$ et $P(X^2+Y^2 \leq 1)$.
2. Donner la densité de la loi de $Z = X+Y$.

Exercice 2 – Deux personnes A et B se donnent rendez-vous en un endroit précis entre midi et une heure. On admet que leurs instants respectifs d'arrivées X et Y sont uniformément répartis entre 0 et 1 et indépendants. Calculer la probabilité que A arrive avant B. Sachant que A arrive avant B, déterminer la loi du temps d'attente de A. Quel est le temps d'attente moyen ?

Exercice 3 – Soit (X,Y) un couple de variables aléatoires admettant pour densité :

$$f(x,y) = 4x(1-y)1_{[0,1]}(x)1_{[0,1]}(y).$$

1. Calculer $P(0 \leq X \leq 1/3, 0 \leq Y \leq 1/3)$.
2. Déterminer les lois de X et Y. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice 4 – Soit (X,Y) un couple de variables aléatoires admettant pour densité :

$$f(x,y) = 2e^{-(x+y)}1_{[0,x]}(y).$$

1. Calculer $P(X+Y \leq 1)$.
2. Déterminer $P(X \leq x, Y \leq y)$, pour $x,y \in \mathbb{R}$.
3. Déterminer les lois de X et Y. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice 5 – S oit (X,Y) un couple de v.a. indépendantes de loi uniforme sur $[0,1]$. On pose $m = \min(X,Y)$ et $M = \max(X,Y)$. Déterminer $P(m \leq x, M \leq y)$ pour $x,y \in \mathbb{R}$. En déduire la densité du couple (m,M).

Exercice 6 – Soit (X,Y) un couple de variables aléatoires admettant pour densité :

$$f(x,y) = 3y1_D(x,y),$$

où D est l'intérieur du triangle de sommets $(-1,0)$, $(0,1)$, $(1,0)$.

1. Déterminer les lois de X et Y.
2. Calculer $E(X)$, $E(Y)$ et $\mathrm{cov}(X,Y)$.

Exercice 7 – On considère un système formé de deux composants A et B indépendants. Les composants sont au départ en fonctionnement. Le composant A (respectivement B) a une durée de fonctionnement qui suit la loi exponentielle de paramètre λ (respectivement μ).

1. Quelle est la probabilité que A tombe en panne avant B ?
2. On suppose que les composants sont en série, c'est-à-dire que le système fonctionne si et seulement si les deux composants fonctionnent. Déterminer la loi de la durée de fonctionnement du système et sa durée moyenne de fonctionnement.
3. On suppose maintenant que les composants sont en parallèle, c'est-à-dire que le système fonctionne si et seulement si au moins l'un des deux fonctionne. Déterminer la durée moyenne de fonctionnement du système. (On pourra s'intéresser à la quantité $\max(X,Y) + \min(X,Y)$).

Exercice 8 – Soient Y_1 et Y_2 des v. a. indépendantes de loi uniforme sur $[0,1]$. On pose $X_1 = \sqrt{-2\log Y_1}\cos(2\pi Y_2)$ et $X_2 = \sqrt{-2\log Y_1}\sin(2\pi Y_2)$.

1. Montrer que X_1 et X_2 suivent une loi normale centrée réduite.
2. Montrer que X_1 et X_2 sont indépendantes.
3. En déduire une méthode pour simuler deux variables aléatoires gaussiennes indépendantes.

Exercice 9 – On note D le premier quart de disque centré en 0, de rayon 1. Soit (X,Y) un couple de variables aléatoires de densité de probabilité

$$g(x,y) = 8xy1_D(x,y).$$

1. Vérifier que g est une densité de probabilité sur $\mathbb{R}^2$.
2. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?
3. Déterminer la densité de probabilité de la variable $Z = X^2+Y^2$ puis celle de $R = \sqrt{X^2+Y^2}$.

Exercice 10 –

1. Montrer que $f(x) = \dfrac{1}{\pi \mathrm{ch} x}$ est une densité de probabilité sur $\mathbb{R}$.
2. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes de loi de densité f. Donner la loi de $X+Y$; pour cela on pourra vérifier que
$$\frac{1}{\mathrm{ch}(y)\mathrm{ch}(x-y)} = \frac{2e^{2y}}{\mathrm{sh}\, x}\left(\frac{1}{1+e^{2y}} - \frac{1}{e^{2y}+e^{2x}}\right), \qquad x \neq 0.$$
3. En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x}{\mathrm{sh}\, x}dx$.