Université Paris Est Marne la Vallée | Module S4MI
Licence Mathématiques & Informatique | Analyse 3
2^{nd} Semestre 2015 – 2016

<u>T.D 1</u> : <u>SUITES DE FONCTIONS</u>.

<u>Exercice 1</u> : Etudier la convergence <u>simple</u> et <u>uniforme</u> des suites de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$:

1°) $f_n(x)=\dfrac{\cos(nx)}{\sqrt{n}}$ sur $\mathbb{R}$; 2°) $f_n(x)=\dfrac{n.e^{-x}+1}{n+x}$ sur $\mathbb{R}_+$; 3°) $f_n(x)=\dfrac{nx}{1+n|x|}$ sur $\mathbb{R}$;

4°) $f_n(x)=x.e^{-nx}$ sur $\mathbb{R}_+$; 5°) $f_n(x)=x^2\sin(\dfrac{1}{nx})$ sur $\mathbb{R}_+^*$; 6°) $f_n(x)=x^n(1-x)$ sur $[0,1]$;

7°) $f_n(x)=\dfrac{ne^x+xe^{-x}}{n+x}$ sur $[0,1]$, sur $\mathbb{R}$; 8°) $f_n(x)=e^{-nx}\sin(\alpha nx)$ sur $\mathbb{R}_+$, sur $[a,+\infty[$, $a>1$.

<u>Exercice 2</u> : Etudier la convergence <u>simple</u> et <u>uniforme</u> des suites de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$:

$$f_n(x)=\begin{cases}1\_si\_x\in[0,\frac{1}{n}[\\ 0\_sinon\end{cases}\ ;\ f_n(x)=\begin{cases}nx\_si\_x\in[0,\frac{1}{n}[\\ \frac{n(x-1)}{1-n}\_si\_x\in[\frac{1}{n},1]\end{cases}\ ;\ f_n(x)=\begin{cases}x\sqrt{n}\_si\_x\in[0,\frac{1}{n}[\\ \frac{(x-1)\sqrt{n}}{1-n}\_si\_x\in[\frac{1}{n},1)\end{cases}$$

<u>Exercice 3</u> : <u>Une approche graphique</u>...

On considère la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies pour tout réel x par : $f_n(x)=\dfrac{1}{1+(x+n)^2}$.

1°) Tracer le graphe de f_0 , puis en déduire celui de f_n pour $n\geq 1$.

2°) Etudier la convergence <u>simple</u> et la convergence <u>uniforme</u> de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur $\mathbb{R}$.

3°) La suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge-t-elle uniformément sur $\mathbb{R}_+$?

<u>Exercice 4</u> : <u>Repérer la convergence uniforme</u>.

Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définies par : $\forall n\ \ \forall x\in\mathbb{R}_+\ \ f_n(x)=\dfrac{1}{n\sqrt{n}}\dfrac{1+nx}{1+n^2x^2}$

converge <u>uniformément</u> sur $\mathbb{R}_+$ vers la fonction nulle.

<u>Exercice 5</u> : <u>Avec des suites de points</u>...

Etudier la convergence <u>simple</u> et la convergence <u>uniforme</u> de la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $f_n(t)=nt^n(1-t)$ sur [0,1], puis sur [0,a] (où a < 1). On pourra considérer la limite de $(f_n(x_n))_{n\in\mathbb{N}^*}$, où $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est la suite de points définie par : x_n = 1-1/n pour tout n. Retrouver le résultat obtenu sans l'indication de la suite de points à utiliser.

Exercice 6 : Etude d'un type général de suite de fonctions
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle qui converge vers un réel λ. Etudier la convergence simple de la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par : $f_n(x)=1$ si $x\le u_n$, $f_n(x)=0$ si $x>u_n$.

Exercice 7 : Suites de fonctions et continuité.

A/ On considère la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies pour tout réel x par : $f_n(x)=\dfrac{1}{1+nx^2}$.

1°) Etudier sa convergence simple sur $\mathbb{R}$. Y a-t-il continuité sur $\mathbb{R}$ de sa limite simple f ?
2°) Y a-t-il convergence uniforme de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers f sur $\mathbb{R}$? Justifier.

B/ On considère la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définies pour tout x de $\mathbb{R}_+$ par : $f_n(x)=\dfrac{x}{x+n}$.

1°) Etudier sa convergence simple sur $\mathbb{R}_+$ .Y a-t-il continuité sur $\mathbb{R}_+$ de sa limite simple f ?
2°) Y a-t-il convergence uniforme de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ vers f sur $\mathbb{R}_+$? Sur tout $[a,b]\subset\mathbb{R}_+$?
3°) Expliquer le résultat de la question 1°) à la lumière des résultats de la question 2°).

Exercice 8 : Suites de fonctions et intégration.
Etudier la convergence simple de la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définies sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$f_n(x)=\begin{cases} n^2x\_si\_0\le x<1/2n \\ n-n^2x\_si\_1/2n\le x<1/n \\ 0\_si\_x\ge 1/n \end{cases}$$; A t-on $\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 f_n(x)dx=\int_0^1 f(x)dx$? Conclure.

Exercice 9 : Suites de fonctions et intégration.

On considère la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies pour tout réel x par : $f_n(x)=\dfrac{2^n x}{1+n2^n x^2}$.

Donner en la limite simple. Calculer $\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 f_n(t)dt$ .Y a t-il convergence uniforme sur $\mathbb{R}$?

Exercice 10 : Suites de fonctions et intégration.
Etudier la convergence simple et la convergence uniforme de la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

$f_n(x)=\dfrac{x^{2n}}{1+x^{2n}}$ sur $\mathbb{R}$, sur]-1,1[, sur $[-a,a]$ (où 0< a <1), sur $]1,+\infty[$, sur $[a,+\infty[$ (où a>*1*).

Montrer : $\forall n\in\mathbb{N}$ $0\le\int_0^1 f_n(t)dt\le\dfrac{1}{2n+1}$. A t-on $\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 f_n(x)dx=\int_0^1 f(x)dx$? Conclure.

Exercice 11 : Suites de fonctions et dérivation.
On considère la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies pour tout réel x par : $f_n(x)=x.e^{-nx^2}$.
1°) Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers une fonction f à déterminer.
2°) A t'on, pour tout réel x l'égalité : $f'(x)=\lim_{n\to+\infty} f_n'(x)$?
3°) La suite de fonctions $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$ converge t'elle uniformément sur $\mathbb{R}$?

Exercice 12 : Suites de fonctions et dérivation.
Etudier sur $\mathbb{R}$ la convergence simple et la convergence uniforme des suites de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(g_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ suivantes. Etudier la continuité et la dérivabilité de leur limite.

$\forall n\in\mathbb{N}^*$ $\forall x\in\mathbb{R}$ $f_n(x)=\sqrt{x^2+\dfrac{1}{n}}$, $g_n(x)=\dfrac{1}{n}\sin(n^2x)$