Université Paris-Est Marne-la-Vallée
S4 MI-MASS 2016-2017

Topologie en dimension 2
TD 1

Exercice 1 :
Pour $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ et $p \in [1, +\infty[$,
on pose : $N_p(x) = (|x_1|^p + |x_2|^p)^{\frac{1}{p}}$ et $N_\infty(x) = \max\{|x_1|, |x_2|\}$
1) Etablir que N_1, N_2 et N_∞ sont des normes sur $\mathbb{R}^2$.
2) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}^2$, $N_\infty(x) = \lim\limits_{p\to+\infty} N_p(x)$
3) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}^2$ $N_\infty(x) \leq N_2(x) \leq N_1(x) \leq 2N_\infty(x)$.
Déduire de l'inégalité de Cauchy-Schwarz que $N_1(x) \leq \sqrt{2}N_2(x)$.

Exercice 2 :
On note d_i la distance sur $\mathbb{R}^2$ associée à la norme N_i pour $i \in \{1, 2, ..., \infty\}$
représenter géométriquement les boules fermées de
centre l'origine et de rayon 1 (boules unités fermées) pour d_1, d_2 et d_∞.
Examiner les relations d'inclusions entre ces boules.

Exercice 3 : (Partiel avril 2016)
Soit l'application N de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad N(x, y) = \max\{|x|, |x + y|\}.$$

1) Montrer que N est une norme sur $\mathbb{R}^2$.
2) Dessiner la boule unité fermée de $\mathbb{R}^2$ relativement à cette norme :

$$\overline{\mathcal{B}(\mathcal{O}, 1)} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ N(x, y) \leq 1\}.$$

3) Déterminer des réels α et β strictement positifs tels que $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\alpha N_1(x, y) \leq N(x, y) \leq \beta N_1(x, y)$$

où $N_1(x, y) = |x| + |y|$.
Que peut-on dire des normes N et N_1 ?

Exercice 4 :
On définit l'application N de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}_+$ définie par :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad N(x, y) = \sup_{t\in[0,1]} |x + ty|$$

1) Montrer que N définit une norme sur $\mathbb{R}^2$.
2) Dessiner la boule unité fermée pour cette norme :
$\overline{\mathcal{B}(\mathcal{O}, 1)} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ N((x, y) \leq 1\}$

Exercice 5 :
On considère la fonction $d : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^+$ définie par

$$d(x, y) = \sum_{i=1}^{2} \frac{|x_i - y_i|}{1 + |x_i - y_i|}, \qquad \forall x = (x_1, x_2) \;\; \forall y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2.$$

1) Montrer que la fonction $f(u) = \dfrac{u}{1+u}$ $(u \geq 0)$ est croissante sur $\mathbb{R}^+$ et vérifie $f(u + v) \leq f(u) + f(v)$ pour tous $u, v \geq 0$.
2) En déduire que d est une distance sur $\mathbb{R}^2$.
3) La distance d est elle associée à une norme sur $\mathbb{R}^2$?

Exercice 6 :
Les sous-ensembles suivants de $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$ sont-ils ouverts ? fermés ? bornés ?
$A_1 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : -1 < x_1 \leq 2\}$
$A_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;;\; 0 < y < x < 1\}$
$A_3 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 x_2 \neq 0\}$
$A_4 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;;\; x > 0,\; x + y \leq 1\}$
$A_5 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;;\; x > 0,\; y < 0,\; x + y = 1\}$
$A_6 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2_+ \;;\; x + y = 1\}$

Exercice 7 :
Montrer que $A_1 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 > 0, x_2 \leq 1/x_1\}$ n'est ni ouvert ni fermé.
On considére $A_2 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 > 0, x_2 < 1/x_1\}$.
Si $x = (x_1, x_2) \in A_2$, montrer que $B_\infty(x, r) \in A_2$ si et seulement si $r < x_1$ et $(x_2 + r)(x_1 + r) < 1$.
Conclure que A est ouvert pour la norme N_∞ puis pour la norme N_2.

Exercice 8 :
1) Soit $a \in \mathbb{R}$.
Montrer que l'ensemble $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \;;\; x_1 > a\}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.
2) Plus généralement, montrer que si y est un vecteur non nul de $\mathbb{R}^2$, l'ensemble $\{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \;;\; x \cdot y > a\}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.
($x \cdot y$ désigne le produit scalaire usuel dans $\mathbb{R}^2$)