Université Paris-Est Marne la-Vallée
S4 MI-MASS 2016-2017
Topologie en dimension 2

TD 4: extrema des fonctions de deux variables

Exercice 1 :
Déterminer l'existence et la nature des extrema des fonctions de deux variables suivantes :

$f_1(x,y) = (2x - y + 1)^2 + (x - 3y)^2 + 1$

$f_2(x,y) = x^2 + 3y^2 + 2x - 4y$

$f_3(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$

$f_4(x,y) = (x^2 + y^2)e^{x^2 - y^2}$

$f_5(x,y) = x^4 + y^4 - 2(x - y)^2$

$f_6(x,y) = \dfrac{(ax + by + c)^2}{x^2 + y^2 + 1}$

$f_7(x,y) = xye^{x-y}$

$f_8(x,y) = \dfrac{1 + xy}{\sqrt{1 + x^2 + y^2}}$

Exercice 2 :
On considère une boîte en carton ouverte sur le dessus.
On assimile cet objet à l'ensemble

$$B = [0,x] \times [0,y] \times [0,z[,$$

où $x > 0$ et $y > 0$ sont les dimensions du fond de la boîte et $z > 0$ sa hauteur. On cherche à fabriquer une boîte de volume 1 en utilisant le moins de papier possible.

1) Montrer que $z = \dfrac{1}{xy}$ et que la surface totale du carton utilisé pour construire la boîte est :

$$S(x,y) = xy + \frac{2}{x} + \frac{2}{y}.$$

On notera $U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x > 0, y > 0\}$ l'ensemble de définition de S et on pose $K = \{(x,y) \in U; S(x,y) \leq S(1,1)\}$

2) Montrer que la fonction S admet un unique point critique $(x^*, y^*) \in U$.

3) Montrer que la fonction S a un minimum local en (x^*, y^*).

4) Le but de cette question est de montrer que ce minimum est en fait global.

a) Montrer que si $(x,y) \in K$, alors $x \geq 2/5$ et $y \geq 2/5$, puis que $K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x^2y^2 + 2x + 2y - 5xy \leq 0, x \geq 2/5, y \geq 2/5\}$.
En déduire que K est fermé.

b) Montrer que si $(x,y) \in K$, alors $0 < x \leq 25/2$ et $0 < y \leq 25/2$.

c) En déduire que K est compact.
d) Montrer qu'il existe un point $(x_o, y_o) \in K$ tel que $S(x_o, y_o) = \inf_{(x,y)\in K} S(x, y)$.
Montrer que S atteint en (x_o, y_o) son minimum global.
Déduire de la question 3 que $(x_o, y_o) = (x^*, y^*)$.

<u>Exercice 3</u> :
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x, y) = 2x^3 + 6xy - 3y^2 + 2$.
1) Déterminer les extrema locaux de la fonction f.
2) La fonction f possède-t-elle des extrema globaux sur $\mathbb{R}^2$?
3) Représenter le segment de droite L défini par

$$L = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ -2 \leq x \leq 0,\ y = x + 1\}.$$

Déterminer les extrema globaux de la restriction de f à L et préciser en quels points de L ils sont atteints.

<u>Exercice 4</u> :
Exercice 1 :
Soit la fonction $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto & 1 - x^2 - 2y^2 \end{array} \right.$
On pose :
$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ ;\ f(x, y) > 0\}$ et $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ ;\ f(x, y) \geq 0\}$
a) Montrer que A est un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et que B est un compact de $\mathbb{R}^2$.

On définit une fonction g sur B par $g(x, y) = xf(x, y)$
b) Justifier le fait qu'il existe un point $M_0(x_0, y_0) \in B$
tel que $g(x_0, y_0) = \sup_{(x,y)\in B} g(x, y)$
c) Etudier les extrema de g sur A.
d) On considère le point M_0 du b)
Etablir que $g(x_0, y_0) \neq 0$.
En déduire que $f(x_0, y_0) \neq 0$ et que $(x_0, y_0) \in A$.
Quel est ce point M_0 et que vaut $g(x_0, y_0)$?